CY TECH	**Préing 1, GC–MI1–MIM1–MIM2–SUPM** **Devoir Surveillé 1**	
	Matière : **Algèbre II** L'usage de tout appareil électronique est interdit	*Date :* **mercredi 6 mars 2024** *Durée :* **1h** *Nombre de pages :* **1**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications. *Le sujet comporte 4 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé. Le barème est indicatif.*

♣ ♣ ♣

Exercice 1 (3 pts, questions de cours)**.** Soient G et G' des groupes d'éléments neutres respectifs e et e', et soit $f\colon G \to G'$ un morphisme de groupe.

1. (1 pt) Rappeler la définition de $\ker f$, le noyau de f.

2. (2 pts) Démontrer que $\ker f$ est un sous-groupe de G.

Exercice 2 (6 pts)**.** Sur l'ensemble $\mathbb{Q}^2$, on définit une loi de composition interne $*$ par :

$$\forall (a,b),(a',b') \in \mathbb{Q}^2, \quad (a,b)*(a',b') = (aa'+2bb',\ ab'+a'b).$$

1. (1,5 pt) Montrer que $*$ est associative et commutative.

2. (1 pt) Montrer que le magma $(\mathbb{Q}^2,*)$ possède un élément neutre.

3. Dans cette question, on considère $(a,b)\in\mathbb{Q}^2$ tel que $(a,b)\neq(0,0)$.

- **a.** (1 pt) Calculer $(a,b)*(a,-b)$.
- **b.** (1 pt) Montrer que a^2-2b^2 ne peut pas être nul.
- **c.** (0,5 pt) En déduire que (a,b) est symétrisable et donner l'expression de son symétrique.

4. (1 pt) Montrer que pour tous $(a,b),(a',b')\in\mathbb{Q}^2$, on a :

$$(a,b)*(a',b') = (0,0) \implies (a,b)=(0,0) \text{ ou } (a',b')=(0,0).$$

En déduire que $*$ est une loi de composition interne sur $G=\mathbb{Q}^2\setminus\{(0,0)\}$ et que $(G,*)$ est un groupe.

Exercice 3 (5 pts)**.** Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On note $\omega_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$ et on considère l'application :

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ k & \longmapsto & \omega_n^k \end{array}$$

1. (2 pts) Montrer que f est un morphisme de $(\mathbb{Z},+)$ dans $(\mathbb{C}^*,\times)$.

2. (2 pts) Déterminer le noyau et l'image de f.

3. (1 pt) En déduire que $\mathbb{U}_n$, l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité, est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*,\times)$.

Exercice 4 (6 pts)**.** Soit $m\in\mathbb{R}$ un paramètre. On considère le système linéaire d'inconnues x,y,z :

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ mx + y + z = 1 \\ x + my + z = 2m. \end{cases} \qquad (\mathcal{S}_m)$$

1. (1 pt) Écrire la matrice augmentée A_m associée à $(\mathcal{S}_m)$.

2. (2 pts) Appliquer l'algorithme du pivot de Gauss pour échelonner A_m.

3. (1 pt) En déduire que le rang de $(\mathcal{S}_m)$ est strictement inférieur à 3 si et seulement si $m=1$ ou $m=0$.

4. (2 pts) Pour $m=1$ et $m=0$, dire si le système est compatible et déterminer l'ensemble des solutions le cas échéant.