Ex 1

Pour qu'une f° soit une f° de densité de probabilité, il faut que :

- $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- f_X continue sur $\mathbb{R}$ sauf pour une partie finie
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

① a) $f(x) = \frac{x}{8} \mathbb{I}_{[\alpha,5]}(x) \qquad \alpha < 5$

On suppose f une fdp $\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{8}\,dx = 1$

par décompositi° $\underbrace{\int_{-\infty}^{\alpha} dx}_{=0} + \int_{\alpha}^{5} dx + \underbrace{\int_{5}^{+\infty} dx}_{=0}$

$$\Leftrightarrow \int_{\alpha}^{5} x\,dx = 8$$

$$\Leftrightarrow \left[x^2\right]_{\alpha}^{5} = 16$$

$$\Leftrightarrow 25 - \alpha^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 = 9$$

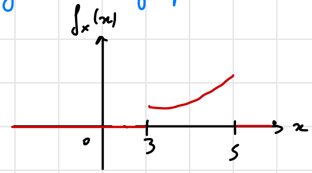
$$\Leftrightarrow \alpha \in \{-3; 3\}$$

- supposons que $\alpha = -3$:
  dans ce cas $f \not\geq 0$ car $f(-3) \leq 0 \Rightarrow f$ n'est pas une f° de densité de proba

- supposons que $\alpha = 3$:
  $\rightarrow f(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$
  $\rightarrow f$ est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R} \setminus \{3; 5\}$
  $\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$ (prouvé + haut)

Ainsi, f est une fdp ssi $\alpha = 3$.

b)



② X est une variable aléatoire réelle absolument convergente de f° de densité de proba f.

a) $\forall x \in \mathbb{R}, \; F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 3 \\ \frac{x}{8} & \text{si } x \in [3;5] \\ 0 & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

Pour $x < 3$: $\int_{-\infty}^{3} 0\,dt = 0$

Pour $x \in [3;5]$: $\int_{-\infty}^{3} 0\,dt + \int_{3}^{x} \frac{t}{8}\,dt = \left[\frac{t^2}{16}\right]_3^x = \frac{1}{16}(x^2 - 3^2)$

Pour $x > 5$: $\int_{-\infty}^{3} 0\,dt + \int_{3}^{5} \frac{t}{8}\,dt + \int_{5}^{+\infty} 0\,dt = \left[\frac{t^2}{16}\right]_3^5 = \frac{1}{16}(25 - 9) = 1$

Ainsi, on a :

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 3 \\ \frac{1}{16}(x^2 - 3^2) \text{ si } 3 \leq x \leq 5 \\ 1 \text{ si } x > 5 \end{cases}$$

f° de répartit° associée à une var :

-> F_X croissante sur $\mathbb{R}$

-> $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

-> $F_X(x)$ est continue à droite sur $\mathbb{R}$

③ $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{3} x f_X(x)\,dx + \int_{3}^{5} x f_X(x)\,dx + \int_{5}^{+\infty} x f_X(x)\,dx$

$= \int_{3}^{5} x f_X(x)\,dx$

$= \int_{3}^{5} \frac{x^2}{8}\,dx$

$= \frac{1}{24}\left[x^3\right]_3^5$

$= \frac{1}{24}(125 - 27)$

$= \frac{98}{24}$

$= \frac{49}{12}$

$E(X^2) = \int_{3}^{5} x^2 f_X(x)\,dx = \int_{3}^{5} \frac{x^3}{8}\,dx$

$= \frac{1}{32}\left[x^4\right]_3^5$

$= \frac{1}{32}(625 - 81)$

$= \frac{544}{32}$

$= 17$

$V(X) = 17 - \left(\frac{49}{12}\right)^2 = \frac{47}{144}$

④ a) $P(\{X \leq 4\}) = F(4) = \frac{7}{16}$

b) $P(\{X>3\}) = 1 - P(\{X<3\})$
$= 1 - F(3)$
$= 1 - 0$
$= 1$

c) $P(\{4<X<5\}) = P(\{4<X\leq 5\})$
$= P(5) - P(4)$
$= 1 - \frac{7}{16}$
$= \frac{9}{16}$

d) $P(\{X\leq 3\} \cup \{X>4\})$ union disjointe
$= F(3) + 1 - F(4)$
$= \frac{9}{16}$

e) $P(\{X\leq 4\} \mid \{X>3\})$ probabilité conditionnelle
$P(A|B) = P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

$= \frac{P(\{X\leq 4\} \cap \{X>3\})}{P(\{X>3\})}$

$= \frac{\overbrace{P(\{3<X\leq 4\})}^{F(4)-F(3)}}{1-F(3)}$

$= \frac{7}{16}$

Ex 2

$Y = 3X - 2$

$f_X(x) = \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{4}} \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x)$ $\Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{4}} & \text{si } x \in [0;+\infty[\\ 0 & \text{si } x \in]-\infty;0[\end{cases}$

① $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f_X(x) \geq 0$ car $0 \geq 0$ et $\frac{1}{4} e^{-\frac{x}{4}} \geq 0$

$\Rightarrow f_X$ est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ sauf sur la partie finie $\{0\}$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f_X(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} f_X(x)\,dx$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{4}}\, dx$$

$$= -\left[e^{-\frac{x}{4}}\right]_0^{b \to +\infty}$$

$$= 1$$

Ainsi, f_X est une f° de densité de probabilité.

② Fonct° de répartit° F_X :

Sur $]-\infty;0[$: $\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$

Sur $]-\infty;+\infty[$: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_0^x f(t)\,dt = \frac{1}{4}\int_0^x e^{-\frac{t}{4}}\,dt = -(e^{-\frac{x}{4}} - 1) = 1 - e^{-\frac{x}{4}}$

$$\Rightarrow F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{4}} & \text{si } x \in [0;+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

③ $\forall y \in \mathbb{R}$, $F_Y(y) = P(\{Y \leq y\}) = P(\{3X - 2 \leq y\})$

$$= P(\{X \leq \tfrac{y+2}{3}\})$$

$$= F\left(\frac{y+2}{3}\right) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{4}\frac{y+2}{3}} & \text{si } 0 \leq \frac{y+2}{3} \\ 0 & \text{si } \frac{y+2}{3} < 0 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{y+2}{12}} & \text{si } -2 \leq y \\ 0 & \text{si } y < -2 \end{cases}$$

④ $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} x f(x)\,dx + \int_0^{+\infty} x f(x)\,dx$

$$= 0 + \int_0^{+\infty} \underset{u}{x}\, \underset{v'}{\frac{1}{4} e^{-\frac{x}{4}}}\,dx$$

$\Rightarrow$ IPP : $\int uv' = [uv] - \int u'v$

IPP: $E(X) = \underbrace{\left[-x e^{-\frac{x}{4}}\right]_0^{b \to +\infty}}_{0} + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{4}x}\,dx$

$$= 4 \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{4} e^{-\frac{x}{4}}\,dx}_{1}$$

$$= 4$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underset{u}{x^2}\, \underset{v'}{\frac{1}{4} e^{-\frac{1}{4}x}}\,dx$$

$$= \left[-x^2 e^{-\frac{1}{4}x}\right]_0^{b \to +\infty} + 2 \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{1}{4}x} \, dx$$ ↙ I PP

$$= 8 \int_0^{+\infty} x \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{4}x} \, dx$$

$$= 32$$

$$\Rightarrow V(x) = E(X^2) - (E(X))^2 = 32 - 16 = 16$$

corollaire 4.3 : $E(aX + b) = a E(X) + b$

propositⁿ 4.12 : $V(aX + b) = a^2 V(X)$

Ainsi : $E(Y) = E(3X - 2) = 3E(X) - 2 = 10$

$V(Y) = V(3X - 2) = 9 \times 16 = 144$

$\Rightarrow V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 \Leftrightarrow E(Y^2) = 144 + 100 = 244$

$E(Y) = 10 \Rightarrow$ 10 min, le temps moyen que le pilote doit attendre avant d'atterrir

⑥ $P(\{5 < Y \leq 10\}) = F_Y(10) - F_Y(5) \simeq 0{,}19$

La probabilité que le temps d'attente soit compris entre 5 et 10 min est d'≈ 19%.

⑦ $P(\{Y > 10\}) = 1 - F_Y(10) \simeq 0{,}36$

36% des avions doivent attendre + de 10 min avant de se poser

Ex 4

① $P(X > 2) = 1 - F(X \leq 2) = 1 - F_X(2) = 1 - \phi\left(\frac{2-0}{1}\right) = 1 - \phi(2) = 1 - 0{,}977250$

$= 0{,}022750$

$P(-1 < X < 1{,}5) = F_X(1{,}5) - F_X(-1) = \phi\left(\frac{1{,}5-0}{1}\right) - \phi(-1) = \phi(1{,}5) - 1 + \phi(1)$

$= 0{,}933193 - 1 + 0{,}841345$

$P(X < 0{,}5) = F_X(0{,}5) = \phi\left(\frac{0{,}5-0}{1}\right) = \phi(0{,}5) = 0{,}691462$

② $P(Y > 2) = 1 - F_Y(2) = 1 - \phi\left(\frac{2-4}{4}\right) = 1 - \phi(-0{,}5) = 1 - (1 - \phi(0{,}5)) = \phi(0{,}5) = 0{,}691462$

$P(-1<Y<1{,}5) = F_Y(1{,}5) - F_Y(-1) = \phi\left(\frac{1{,}5-4}{4}\right) - \phi\left(\frac{-1-4}{4}\right) = \phi(-0{,}625) - \phi(-1{,}25)$

$= 1 - \frac{(\phi(0{,}62)+\phi(0{,}63))}{2} - (1-\phi(1{,}25))$

$= -\frac{0{,}732371+0{,}735653}{2} + 0{,}894350$

$= -0{,}8661855 + 0{,}894350$

$= 0{,}0281645$

$P(Y<0{,}5) = F_Y(0{,}5) = \phi\left(\frac{0{,}5-4}{4}\right) = \phi(-0{,}875)$

$= 1 - \frac{\phi(0{,}87)+\phi(0{,}88)}{2}$

$= 1 - \frac{0{,}807850+0{,}810570}{2}$

$= 1 - 0{,}809210$

$= 0{,}19079$

③ $P(|U-4|<3) = P(-3<U-4<3) = P(1<U<7) = F(7)-F(1) = \phi\left(\frac{7-6}{2}\right) - \phi\left(\frac{1-6}{2}\right)$

$= \phi(0{,}5) - \phi(-2{,}5)$

$= \phi(0{,}5) - 1 + \phi(2{,}5)$

$= 0{,}691462 - 1 + 0{,}993790$

$= 0{,}685252$

$P_{\{U>3\}}(U>6)$

④ $P(V<5) = 0{,}1587 \Leftrightarrow F(5) = 0{,}1587 \Leftrightarrow \phi\left(\frac{5-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}1587 \Leftrightarrow \phi(-1) = 1-\phi(1) = 1-0{,}8413 = 0{,}1587$

$P(V<20) = 0{,}9772 \Leftrightarrow F(20) = 0{,}9772 \Leftrightarrow \phi\left(\frac{20-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}9772 \Leftrightarrow \frac{20-\mu}{\sigma} = 2{,}00$

$5 \quad 10$

Exercice 3

① $\phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt \quad \phi'(x) = \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} > 0$

$\Rightarrow \phi$ est strictement croissante

② Théorème si $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle
$f : I \to \mathbb{R}$ une f°

si I) f C^0 sur $\mathbb{R}$
II) f monotone
alors f est une bijectᵒ de I vers $f(I)$
$f(I)$ est un intervalle

$\phi(x) + \phi(-x) = P(X \leq x) + P(X \leq -x) = P(X \leq x) + P(X \geq x) = 1$

$\Rightarrow \phi(x) + \phi(-x) = 1$

On sait donc que $\phi(0) + \phi(-0) = 1 \Leftrightarrow 2\phi(0) = 1 \Leftrightarrow \phi(0) = \frac{1}{2}$

③ $a > 0$: $P(|X| \leq a) = P(-a \leq X \leq a)$

$$
\begin{aligned}
&= P(X \leq a) - P(X \leq -a) \\
&= \phi(a) - \phi(-a) \\
&= \phi(a) - 1 + \phi(a) \\
&= 2\phi(a) - 1 > 0{,}95 \\
&\Leftrightarrow \phi(a) > \frac{1{,}95}{2} = 0{,}975
\end{aligned}
$$

D'après la table de la loi normale, $a \geq 1{,}96$.

Exercice 5

① $P(X \leq 80) = \phi\left(\frac{80-100}{15}\right) = \phi\left(\frac{-20}{15}\right) = \phi(-1{,}33) = 1 - \phi(1{,}33) = 1 - 0{,}908241 = 0{,}091759$

$\simeq 0{,}09$

$= 9\%$

② $P(105 \leq X \leq 110) = P(X \leq 110) - P(X \leq 105) = \phi\left(\frac{110-100}{15}\right) - \phi\left(\frac{105-100}{15}\right)$

$$
\begin{aligned}
&= \phi(0{,}67) - \phi(0{,}33) \\
&= 0{,}748571 - 0{,}629300 \\
&= 0{,}119271 \\
&\simeq 0{,}12 \\
&= 12\%
\end{aligned}
$$

③