Suites de variables aléatoires réelles
Convergence

Khalid El Amine I.
Department of Mathematics

★★★

Dans tout ce chapitre :

- Ω est un ensemble non vide.
- $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace probabilisable.
- $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé.
- $\mathbb{R}$ sera toujours muni de la tribu de Borel, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.
- Toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans l'espace probabilisable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

1 Inégalités de Markov et Chebyshev

Les inégalités de cette section fournissent des majorations sur la probabilité qu'une variable aléatoire prenne une valeur «extrême» dans la queue droite et/ou gauche d'une distribution.

Théorème 1.1 (Inégalité de Markov)
Soit X une v.a.r.. Si X admet une espérance, alors :

$$\forall a \in \mathbb{R}^{+*}, \quad P(|X| > a) \leq \frac{E(|X|)}{a}$$

Preuve. bigbreak

Théorème 1.2 (Inégalité de Markov)
Soit X une v.a.r.. Si X admet un moment d'ordre $m \in \mathbb{N}^*$ alors :

$$\forall a \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad P(|X| > a) \leq \frac{E(|X|^m)}{a^m}$$

Preuve.

Théorème 1.3 (Inégalité de Chebyshev)
Soit X une v.a.r.. Si X admet une variance, alors :

$$\forall a \in \mathbb{R}^{+*}, \quad P(|X - E(X)| > a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

Preuve.

2 Convergence en loi

Définition 2.1 (Convergence en loi)
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.rs et $(F_{X_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des fonctions de répartition associées. Soit X une v.a.r. et F_X sa fonction de répartition.

On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X, si et seulement si, $(F_{X_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers F_X en tout point de continuité de F_X.

Notation :

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$$

Remarque. Notons $C(F_X) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ F_X \text{ est continue en } x\}$. Alors

$$\begin{aligned} X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \quad & \Longleftrightarrow \quad F_{X_n}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} F_X(x) \ , \quad \forall x \in C(F_X) \\ & \Longleftrightarrow \quad P(X_n \leq x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P(X \leq x) \ , \quad \forall x \in C(F_X) \end{aligned}$$

Exemple. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. discrètes tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$X_n(\Omega) = \{0, 1\}$$

et de fonction de masse de probabilité

$$p_{X_n}(x) = \begin{cases} 1/n & \text{si } x = 0 \\ 1 - 1/n & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

i.e

$$p_{X_n} = \frac{1}{n} \cdot I_{\{0\}} + (1 - \frac{1}{n}) \cdot I_{\{1\}}$$

Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers la v.a.r. constante égale à 1.

Solution.

Théorème 2.2 *Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.*

Si une suite de v.a.rs $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une v.a.r. X, alors la suite de v.a.r. $(g(X_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la v.a.r. $g(X)$.

Preuve.

3 Convergence en probabilité

Définition 3.1 (Convergence en probabilité)
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.rs et X une v.a.r.. On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers X, si et seulement si,

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad P(|X_n - X| > \epsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Notation :

$$X_n \xrightarrow{P} X$$

Remarque.

$$P(|X_n - X| > \epsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad P(|X_n - X| \leq \epsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Notons que $(P(|X_n - X| > \epsilon))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de nombre réels.

Exemple. **Suite de v.a.rs discrètes**
Soit X une v.a.r. discrète avec $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et f.m.p. p_X définie par :

$$p_X(x) = \begin{cases} 2/3 & \text{si } x = 0 \\ 1/3 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.rs discrètes de terme général

$$X_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) X$$

Montrer que $X_n \xrightarrow{P} X$.

Solution.

Exemple. **Suite de v.a.rs absolument continues**
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.rs absolument continues. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit une distribution exponentielle de paramètre n, i.e. $X_n \sim \mathcal{E}(n)$. Montrer que X_n converge en probabilité vers 0.

Solution.

Théorème 3.2 *Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.*
Si une suite de v.a.rs $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers une v.a.r. X, alors la suite de v.a.rs $(g(X_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la v.a.r. $g(X)$.

Preuve.

Proposition 3.3 *Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers X, alors elle converge en loi vers X.*

Preuve.

4 Convergence en moyenne

4.1 Espace L^r

Définition 4.1 (L^r space)
Soit $r \in [1, +\infty[$ et X une v.a.r..

- *On dit que X est r-intégrable, si et seulement si, $E(|X|^r) < \infty$.*
- *On appelle espace L^r, l'ensemble des v.a.rs r-intégrable, i.e*

$$L^r = \{X : \Omega \to \mathbb{R}\ ;\ E(|X|^r) < \infty\}$$

En particulier, si X est une v.a.r., alors

- On dit que X est intégrable, et on note $X \in L^1$, si X admet un moment d'ordre 1. i.e. :

$$X \in L^1 \iff E(|X|) < +\infty$$

- On dit que X est de carré intégrable, et on note $X \in L^2$, si X admet un moment d'ordre 2. i.e. :

$$X \in L^2 \iff E(|X|^2) < +\infty$$

4.2 Convergence en moyenne et en moyenne quadratique

Définition 4.2 (Convergence en moyenne)
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.rs intégrables et X une v.a.r. intégrable.

On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en moyenne (ou converge dans L^1) vers X, si et seulement si,

$$E(|X_n - X|) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Notation :

$$X_n \xrightarrow{L^1} X$$

Remarque. Notons que pour la convergence en moyenne, il est nécessaire que $E(|X_n - X|) < +\infty$, ce qui est généralement assuré en exigeant que X_n et X soient intégrables.

Définition 4.3 (Convergence en moyenne quadratique)
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.rs de carré intégrable et X une v.a.r. de carré intégrable.

On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en moyenne quadratique (ou converge dans L^2) vers X, si et seulement si,

$$E(|X_n - X|^2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Notation :

$$X_n \xrightarrow{L^2} X$$

Remarque. Notons que pour la convergence en moyenne quadratique, il est nécessaire que $E(|X_n - X|^2) < +\infty$, ce qui est généralement assuré en exigeant que X_n et X soient de carré intégrable.

Exemple 1. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.rs discrètes telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$X_n(\Omega) = \{0, n\}$$

et f.m.p.

$$p_{X_n}(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{n^3} & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{n^3} & \text{si } x = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ convergence en moyenne quadratique et en moyenne vers la v.a.r. $X = 0$.

Solution.

Exemple 2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.rs discrètes telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$X_n(\Omega) = \{0, n\}$$

et f.m.p.

$$p_{X_n}(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{n^2} & \text{if } x = 0 \\ \dfrac{1}{n^2} & \text{if } x = n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

La suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge-elle en moyenne quadratique vers la v.a.r. $X = 0$? et en moyenne ?

Solution.

Théorème 4.4 *Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.*
soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.rs et X une v.a.r..

- *Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en moyenne quadratique vers X, alors la suite de v.a.rs $(g(X_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en moyenne quadratique vers $g(X)$.*
- *Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en moyenne vers X, alors la suite de v.a.rs $(g(X_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en moyenne vers $g(X)$.*

Preuve.

Proposition 4.5 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.rs et X une v.a.r.*

- *Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en moyenne quadratique vers X, alors elle converge en moyenne vers X.*
- *Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en moyenne vers X, alors elle converge en probabilité vers X.*

Preuve.

4.3 Convergence en moyenne d'ordre r

Définition 4.6 (Convergence en moyenne d'ordre r)
Soit $r \in [1, +\infty[$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.rs et X une v.a.r. telles que $E(|X_n|^r) < \infty$ et $E(|X|^r) < \infty$.

On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en moyenne d'ordre r (ou converge dans L^r) vers X, si et seulement si,

$$E(|X_n - X|^r) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Notation :

$$X_n \xrightarrow{L^r} X$$

Exemple 1. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.rs discrètes telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$X_n(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$$

et f.m.p.

$$p_{X_n}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2n} & \text{si } x = -1 \\ 1 - \dfrac{1}{n} & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{2n} & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que, pour tout $r \in [1, +\infty[$, $X_n \xrightarrow{L^r} 0$.

Solution.

Exemple 2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.rs absolument continues telle que $X_n \sim U\left(\left[0, \dfrac{1}{n}\right]\right)$.

Montrer que $X_n \xrightarrow{L^r} 0$ pour tout $r \in [1, +\infty[$.

Solution.

Théorème 4.7 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.rs et X une v.a.r.. Alors pour tout $s > r \geq 1$*

$$X_n \xrightarrow{L^s} X \implies X_n \xrightarrow{L^r} X$$

Preuve.

5 Convergence presque sûre

Définition 5.1 (Convergence presque sûre)
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.rs et X une v.a.r.. On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers X, si et seulement si,

$$\text{existe un événement } M \text{ tel que : } \begin{cases} (1)\ P(M) = 1 \\ (2)\ \forall \omega \in M, \quad X_n(\omega) \xrightarrow[n\to+\infty]{} X(\omega) \end{cases}$$

Notation :

$$X_n \xrightarrow{p.s.} X$$

Remarque. On dit aussi que (X_n) converge vers X avec probabilité 1.

$$X_n \xrightarrow{p.s.} X \iff P(\{\omega \in \Omega \ : \ X_n(\omega) \xrightarrow[n\to+\infty]{} X(\omega)\}) = 1$$

$$\iff \text{existe un événement } N \text{ tel que : } \begin{cases} (1)\ P(N) = 0 \\ (2)\ \forall \omega \in N^c, \quad X_n(\omega) \xrightarrow[n\to+\infty]{} X(\omega) \end{cases}$$

• La convergence presque sûre est la version probabilistique de la convergence simple des suites de fonctions en analyse réelle.

Exemple. On travaille dans l'espace probabilisé $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P)$ où P est la probabilité uniforme sur le segment $[0,1]$, i.e :

$$P(B) = \int_B I_{[0,1]}(x)dx = \int_{B\cap[0,1]} dx \ , \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

1. Si $X_n = I_{]0,\frac{1}{n}]}$. Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la variable certaine $X = 0$.

2. Si $X_n = I_{[0,\frac{1}{n}]}$. Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers la variable certaine $X = 0$.

Solution.

Théorème 5.2 *Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.*
Si une suite de v.a.rs $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers une v.a.r. X, alors la suite de v.a.rs $(g(X_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers la v.a.r. $g(X)$.

Preuve.

Proposition 5.3 *Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers X, alors elle converge en probabilité vers X.*

Preuve.

Theorem 5.1 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.rs.*
si la suite converge

- *presque sûrement ;*
- *ou en probabilité ;*
- *ou en moyenne d'ordre r ;*

- *ou en loi ;*

alors, la variable aléatoire limite est unique.

Preuve.

Diagramme des convergences

Le diagramme ci-dessous récapitule les liens entre les divers modes de convergence.

$$\begin{array}{ccccc} & & \textit{Convergence } L^2 & & \\ & & \downarrow & & \\ & & \textit{Convergence } L^1 & & \\ & & \downarrow & & \\ \textit{Convergence p.s.} & \longrightarrow & \textit{Convergence en probabilité} & \longrightarrow & \textit{Convergence en loi} \end{array}$$

Composition et convergences

Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors :

- $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \implies g(X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} g(X)$
- $X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} X \implies g(X_n) \xrightarrow{\mathcal{P}} g(X)$
- $X_n \xrightarrow{L^1} X \implies g(X_n) \xrightarrow{L^1} g(X)$
- $X_n \xrightarrow{L^2} X \implies g(X_n) \xrightarrow{L^2} g(X)$
- $X_n \xrightarrow{p.s.} X \implies g(X_n) \xrightarrow{p.s.} g(X)$

6 V.A.Rs Indépendantes et Identiquement Distribuées

La f.r. (ou f.d.p./f.m.p.) d'une v.a.r. caractérise complètement sa distribution. En d'autres termes, elle contient tout ce que nous devons savoir sur la loi du caractère aléatoire de cette variable aléatoire. Si deux variables aléatoires donnent la même f.r., alors elles ont la même distribution.

Définition 6.1 *Soit X et Y deux v.a.rs.*

- *On dit que X et Y sont identiquement distribuées (i.d. en abrégé), si et seulement si, elles ont même distribution (i.e. même f.r ou même f.d.p./f.m.p.).*

- *On dit que X et Y sont indépendantes identiquement distribuées, (i.i.d. en abrégé), si et seulement si, elles sont indépendantes et elles ont même distribution (loi).*

Note. On généralise cette définition pour une suite finie de v.a.rs $(X_i)_{i=1}^n$.

Définition 6.2 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.rs.*

- *On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est identiquement distribuée (i.d. en abrégé), si et seulement si, les X_n ont même distribution (i.e. même f.r ou même f.d.p./f.m.p.).*

- *On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est indépendante identiquement distribuée, (i.i.d. en abrégé), si et seulement si, les X_n sont indépendantes et elles ont même distribution.*

Définition 6.3 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.rs.*

Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{et} \quad M_n = \frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

- *S_n est appelée somme partielle d'ordre n de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.*
- *M_n est appelée moyenne arithmétique d'ordre n de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.*

Note. Notons que S_n et M_n, étant des sommes de variables aléatoires, sont elles-mêmes des variables aléatoires.

Remarque. En statistique, M_n est notée $\overline{X}_n$ et est appelée moyenne empirique.

Propriété 6.4 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.rs.*

- *Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est identiquement distribuée et $E(|X_1|) < \infty$, alors, $\forall n \in \mathbb{N}^*$*

$$E(S_n) = nE(X_1) \quad \text{et} \quad E(M_n) = E(X_1)$$

- *Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ indépendante identiquement distribuée et $E(|X_1|^2) < \infty$, alors, $\forall n \in \mathbb{N}^*$*

$$V(S_n) = nV(X_1) \quad \text{et} \quad V(M_n) = \frac{V(X_1)}{n}$$

Preuve.

7 Loi des grands nombres

7.1 Loi faible des grands nombres

Théorème 7.1 (Loi faible des grands nombres (LfGN))
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r.-i.i.d.. Si $E(|X_1|^2) < \infty$, alors

$$M_n \xrightarrow{P} E(X_1)$$

Preuve. On applique l'inégalité de Chebyshev. $\forall \epsilon > 0$

$$P(|M_n - E(X_1)| > \epsilon) = P(|M_n - E(M_n)| > \epsilon) \leq \frac{V(M_n)}{\epsilon^2} = \frac{V(X_1)}{n\epsilon^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

La limite du terme à droite existe puisque $V(X_1)$ est finie (car $E(|X_1|^2)$ est finie).

Remarque.

$$P(|M_n - E(X_1)| > \epsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \iff P(|M_n - E(X_1)| \leq \epsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

La LfGN dit que lorsque n augmente, la probabilité de l'événement "M_n est à moins de ϵ autour de la moyenne $E(X_1)$" tend vers 1. Nous pouvons considérer ϵ comme une petite tolérance d'erreur par rapport à la moyenne $E(X_1)$.

Application de la LfGN.

Exemple 1. Considérons l'expérience aléatoire qui consiste à lancer une pièce de monnaie n fois. Si S_n représente le nombre de faces observées dans ces n lancers, alors S_n/n représente la proportion de faces dans ces n lancers.

La loi des grands nombres prédit que les résultats de la variable aléatoire S_n/n seront, pour les grands n, proches de $1/2$.

Rigoureusement, cela signifie que pour tout $\epsilon > 0$ arbitrairement petit, la probabilité de l'événement "la proportion de faces diffère de $1/2$ de plus de ϵ" tend vers 0 lorsque n tend vers ∞.

En effet. Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ la suite de v.a.rs définie par

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si le } i\text{-ème lancer est face} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit

$$S_n = X_1 + X2 + \cdots + X_n$$

La v.a.r. S_n compte le nombre de faces obtenues lors des n lancers.

Les v.a.rs X_i sont i.i.d., $X_i \sim \mathcal{B}(1/2)$ et nous avons

$$E(X_i) = E(X_1) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad E(|X_i|^2) = E((X_1)^2) = \frac{1}{2}$$

Puisque $E(|X_1|^2) = \dfrac{1}{2} < \infty$, par la LfGN, il vient

$$\frac{S_n}{n} = M_n \xrightarrow{P} \frac{1}{2}$$

Exemple 2. Considérons l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé honnête à six face, n fois. Notons X_i le résultat du i-ème lancer. Alors $S_n = X_1 + X2 + \cdots + X_n$ est la somme des nombre de points obtenus lors des n lancers. Nous savons que

$$E(X_1) = 7/2$$

Les v.a.rs X_i sont i.i.d. avec $E(|X_1|^2) = E((X_1)^2) = 91/6 < \infty$. Ainsi par la LfGN,

$$\frac{S_n}{n} = M_n \xrightarrow{P} \frac{7}{2}$$

7.2 Loi forte des grands nombres

Théorème 7.2 (Loi forte des grands nombres (LFGN)[Kolmogorov-Khintchine])
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de v.a.r.-i.i.d.. Alors

$$M_n \text{ converge presque sûrement} \Longleftrightarrow E(|X_1|) < \infty$$

En cas de convergence :

$$M_n \xrightarrow{p.s.} E(X_1)$$

Preuve.

Application de la LFGN.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.rs indépendantes

1) Si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \sim \mathcal{B}(\alpha)$, alors $E(X_1) = \alpha$.
   Puisque $E(|X_1|) = \alpha < \infty$, la suite $(M_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement. Donc

$$M_n \xrightarrow{p.s.} \alpha$$

2) Si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors $E(X_1) = \lambda$.
   Puisque $E(|X_1|) = \lambda < \infty$, la suite $(M_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement. Donc

$$M_n \xrightarrow{p.s.} \lambda$$

3) Si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \sim \mathcal{N}(0,1)$, alors $E(X_1) = 0$.
   Puisque

$$E(|X_1|) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |x| e^{-\frac{1}{2}x^2} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{1}{2}x^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} < \infty$$

   la suite $(M_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement. Donc

$$M_n \xrightarrow{p.s.} 0$$

Remarque. Comme la convergence presque sûr implique la convergence en probabilité, nous avons,

1) Si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \sim \mathcal{B}(\alpha)$, alors $M_n \xrightarrow{P} \alpha$
2) Si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors $M_n \xrightarrow{P} \lambda$
3) Si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \sim \mathcal{N}(0,1)$, alors $M_n \xrightarrow{P} 0$

8 Central Limit Theorem

Étant donné une v.a.r. X d'espérance $E(X)$ et d'écart type $\sigma(X)$, nous définissons sa standardisée comme la nouvelle v.a.r.

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$$

X^* est donc obtenue en soustrayant de X son espérance et en divisant par son écart-type. On dit qu'on centre et on réduit. Rappelons que X^* a pour espérance 0 et pour variance 1.

Rappelons aussi que si X suit une distribution normale, alors sa standardisée X^* suit une distribution normale standard et donc a pour espérance 0 et variance 1.

Notons maintenant S_n^* la v.a.r. standardisée de S_n, i.e.

$$S_n^* = \frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)}$$

Nous avons le théorème fondamental

Théorème 8.1 (Central Limit Theorem (CLT))
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r.-i.i.d.. Si $E(|X_1|^2) < \infty$ et $V(X_1) > 0$, alors

- *la suite de terme général*

$$S_n^* = \frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)} = \frac{S_n - nE(X_1)}{\sqrt{nV(X_1)}}$$

converge en loi vers une v.a.r. Z^* suivant une loi normale standard $\mathcal{N}(0,1)$. i.e. :

$$S_n^* \xrightarrow{\mathcal{L}} Z^*$$

- *En notant Φ la fonction de répartition de Z^*, il vient*

$$\lim_{n\to+\infty} F_{S_n^*}(z) = \Phi(z) \ , \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

Preuve.

Corollaire 8.2 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r-i.i.d.. Si $E(|X_1|^2) < \infty$ et $V(X_1) > 0$, alors*

$$M_n^* \xrightarrow{d} Z^* \quad \textit{avec} \quad Z^* \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Preuve. La v.a.r. M_n^*, standardisée de, M_n vérifie

$$M_n^* = \frac{M_n - E(M_n)}{\sigma(M_n)} = \frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)} = S_n^*$$

On peut par conséquent appliquer le CLT à la suite de v.a.rs de terme générale M_n^*.

9 Application du Central Limit Theorem

9.1 Préliminaires

Notations:

• Le symbol $\simeq$ est lu "est égal approximativement".

• Le symbol $\approx$ est lu "suit approximativement".

Définition 9.1 (Échantillon aléatoire)
Une suite finie $(X_i)_{i=1}^n$ de n v.a.r-i.i.d. est appelée échantillon aléatoire de taille n (ou n-échantillon aléatoire).

Proposition 9.2 (Formule de transformation affine)
Soit $a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$. Alors

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Longleftrightarrow Y = aX + b \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$$

Preuve.

9.2 Approximation normale standard pour la somme partielle standardisée et la moyenne arithmétique standardisée

Proposition 9.3 *Soit $(X_i)_{i=1}^n$ un n-échantillon aléatoire avec $0 < V(X_1) < \infty$. Pour n assez grand*

$$F_{S_n^*}(z) \simeq \Phi(z) \ , \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

et

$$F_{M_n^*}(z) \simeq \Phi(z) \ , \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

Preuve.

Interprétation. Pour n assez grand,
S_n^* et M_n^* suivent approximativement une loi normale standard, i.e.

$$S_n^* \approx \mathcal{N}(0,1) \quad \text{et} \quad M_n^* \approx \mathcal{N}(0,1)$$

En pratique. En général, pour $n \geq 30$, on utilise les approximations ci-dessus.

9.3 Approximation normale pour la moyenne arithmétique

Proposition 9.4 *Soit $(X_i)_{i=1}^n$ un n-échantillon aléatoire avec $0 < V(X_1) < \infty$. Pour n assez grand*

$$M_n \approx \mathcal{N}(E(M_n), V(M_n))$$

i.e

$$M_n \approx \mathcal{N}\left(E(X_1), \frac{V(X_1)}{n}\right)$$

Interprétation. Pour n assez grand,
M_n suit approximativement une loi normale de paramètres $\mu = E(X_1)$ et $\sigma^2 = V(X_1)/n$.

Preuve.

Exemple. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r.-i.i.d. de BERNOULLI de paramètre $\alpha = 1/2$.
Utilisez le CLT pour déterminer une distribution approximative de la moyenne arithmétique des 100 premiers termes de la suite.

Solution.

9.4 Approximation normale pour la somme partielle

Proposition 9.5 *Soit $(X_i)_{i=1}^n$ un n-échantillon aléatoire avec $0 < V(X_1) < \infty$. Alors pour n assez grand*

$$S_n \approx \mathcal{N}(E(S_n), V(S_n))$$

i.e

$$S_n \approx \mathcal{N}\left(nE(X_1), nV(X_1)\right)$$

Interprétation. Pour n assez grand,
S_n suit approximativement une loi normale de paramètres $\mu = nE(X_1)$ et $\sigma^2 = nV(X_1)$.

Preuve.

Exemple. Une pièce de monnaie équilibrée est lancée 400 fois. Utilisez le CLT pour calculer une approximation de la probabilité d'obtenir au moins 205 faces.

Solution.

Algorithme. Comment appliquer le CLT.

1) Écrire la v.a.r. X qui nous intéresse comme la somme de n v.a.r.-i.i.d. X_i :

$$X = X_1 + \cdots + X_n$$

2) Calculer $E(X)$ et $V(X)$ en utilisant les formules

$$E(X) = nE(X_1) \quad \text{et} \quad V(X) = nV(X_1)$$

3) pour n assez grand

$$\mathcal{L}(X) \simeq \mathcal{N}(E(X), V(X))$$

Ou bien, utiliser la standardisée de X.
$X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}}$ suit approximativement une loi normale standard.

$$F_{X^*} \simeq \Phi$$

Exemple. Un caissier de banque sert un par un les clients debout dans la file d'attente. Supposons que le temps de service (en minutes) X_i pour le client i a pour moyenne $E(X_i) = 2\, min$ et $V(X_i) = 1\, min^2$. Supposons que les délais de service pour les différents clients de la banque sont indépendants. Soit X le temps total que le caissier de banque passe à servir les 50 clients. Trouvez $P(90 < X \leq 110)$.

Solution.

9.5 Approximation normale pour la loi binomiale

Définition 9.6 *Soit $\alpha \in]0,1[$. On dit qu'une v.a.r. discrète X suit une loi de* BERNOULLI *de paramètre α, si et seulement si, sa fonction de masse de probabilité est*

$$p_X(k) = \begin{cases} 1-\alpha & si\ k=0 \\ \alpha & si\ k=1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Notation:

$$X \sim \mathcal{B}(\alpha)$$

- *Une v.a.r. qui suit une loi de* BERNOULLI *est dite v.a.r. de* BERNOULLI.

Proposition 9.7 *Soit $\alpha \in]0,1[$. Soit $(X_i)_{i=1}^n$ un n-échantillon aléatoire avec $X_1 \sim \mathcal{B}(\alpha)$. Alors*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{B}(n,\alpha)$$

Preuve.

Proposition 9.8 *Soit $X \sim \mathcal{B}(n,\alpha)$. Alors pour n assez grand*

$$X \approx \mathcal{N}(n\alpha, n\alpha(1-\alpha))$$

Preuve.

En pratique. Lorsque ($n \geq 30$ et $n\alpha \geq 5$ et $n(1-\alpha) \geq 5$) ou bien ($n\alpha \geq 15$ et $n(1-\alpha) \geq 15$), on utilise l'approximation

$$\mathcal{B}(n,\alpha) \simeq \mathcal{N}(n\alpha, n\alpha(1-\alpha))$$

Preuve. Pour n assez grand, le CLT nous permet d'approcher la loi de S_n par une loi normale, i.e :

$$\mathcal{B}(n,\alpha) \simeq \mathcal{N}(nE(X_1), nV(X_1))$$

Comme $E(X_1) = \alpha$ et $V(X_1) = \alpha(1-\alpha)$), il vient

$$\mathcal{B}(n,\alpha) \simeq \mathcal{N}(n\alpha, n\alpha(1-\alpha))$$

Exemple. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $c \in \mathbb{R}$. Soit X une v.a.r. discrète telle que : $X \sim \mathcal{B}(n, 0.6)$. On donne

$$p_X(0) = 10^{-39} \quad \text{et} \quad P(E[X] - c < X \leq E[X] + c) = 0.95$$

1) a) Donner la f.m.p. de X.
   b) Calculer approximativement la valeur de n.

2) a) Par quelle loi peut-on approcher la loi de X ? Justifier.
   b) Calculer approximativement la valeur de c.

Solution.

9.6 Approximation normale pour la loi de Poisson

Définition 9.9 *Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{*+}$. On dit qu'une v.a.r. X suit une loi de Poisson de paramètre λ, si et seulement si, sa fonction de masse de probabilité est*

$$p_X(k) = \begin{cases} e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}, & \forall k \in \mathbb{N} \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

où $k!$ est le factoriel de k.

Notation :

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$$

- *Une v.a.r. qui suit une loi de Poisson est dite v.a.r. de Poisson.*

Proposition 9.10 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{*+}$. Soit $(X_i)_{i=1}^n$ un n-échantillon aléatoire avec $X_1 \sim \mathcal{P}(\alpha)$. Alors*

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{P}(n\alpha)$$

Preuve.

Proposition 9.11 *Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Alors, pour λ assez grand*

$$X \approx \mathcal{N}(\lambda, \lambda)$$

Preuve.

En pratique. Lorsque $\lambda \geq 15$, on utilise l'approximation

$$\mathcal{P}(\lambda) \simeq \mathcal{N}(\lambda, \lambda)$$

En posant $\lambda = n\alpha$, la valeur minimale de n sera fixé par la valeur de α. On doit avoir $n \geq 15/\alpha$.

Preuve. Pour n assez grand, le CLT nous permet d'approcher la loi de S_n par une loi normale, i.e :

$$\mathcal{P}(n\alpha) \simeq \mathcal{N}(nE(X_1), nV(X_1))$$

Comme $E(X_1) = \alpha$ et $V(X_1) = \alpha$, il vient

$$\mathcal{P}(n\alpha) \simeq \mathcal{N}(n\alpha, n\alpha)$$

Exemple. Le nombre d'étudiants X qui s'inscrivent à un cours de statistique est une variable aléatoire de Poisson de moyenne 100. Le professeur responsable du cours a décidé que si le nombre d'inscrits est de 120 ou plus, il enseignera le cours en deux sections distinctes, alors que si moins de 120 étudiants s'inscrivent, il enseignera à tous les étudiants ensemble dans une seule section. Quelle est la probabilité que le professeur doive enseigner deux sections ?

1) Donnez la solution exacte.

2) Donnez une solution approximative.

Solution.

Résumé

CLT en théorie.

- $F_{S_n^*}(z) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Phi(z)$, $\forall z \in \mathbb{R}$
- $F_{M_n^*}(z) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Phi(z)$, $\forall z \in \mathbb{R}$

CLT en pratique. Pour n assez grand

- $S_n^* \approx \mathcal{N}(0,1)$. i.e. $F_{S_n^*}(z) \simeq \Phi(z)$, $\forall z \in \mathbb{R}$.
- $M_n^* \approx \mathcal{N}(0,1)$. i.e. $F_{M_n^*}(z) \simeq \Phi(z)$, $\forall z \in \mathbb{R}$.

- $S_n \approx \mathcal{N}(E(S_n), V(S_n)) = \mathcal{N}(nE(X_1), nV(X_1))$.
- $M_n \approx \mathcal{N}(E(M_n), V(M_n)) = \mathcal{N}\left(E(X_1), \dfrac{V(X_1)}{n}\right)$.

9.7 Correction de continuité pour les v.a.rs discrètes

Lorsqu'on approche une loi discrète par une loi continue, dans le but de faire des calculs de probabilités, le résultat est parfois peu satisfaisant. Afin d'améliorer la précision des calculs, un ajustement, connu sous le nom de correction de continuité, est parfois nécessaire.

Supposons que X soit une v.a.r. qui ne prend que des valeurs entières et telles que

$$X \approx \mathcal{N}(E(X), V(X))$$

Pour tenir compte du caractère discret de X, nous écrivons la probabilité $P(X = k)$ (qui serait exactement 0 sous l'approximation par la loi normale) comme $P(k - 1/2 < X \leq k + 1/2)$ (pour que X prenne ses valeurs dans un intervalle de longueur non nulle) et appliquer l'approximation normale à ce dernier. Ainsi

- Pour $k \in X(\Omega)$, on obtient

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(k - 1/2 < X \leq k + 1/2) \\ &\simeq \Phi\left(\frac{k + 1/2 - E(X)}{\sqrt{V(X)}}\right) - \Phi\left(\frac{k - 1/2 - E(X)}{\sqrt{V(X)}}\right) \end{aligned}$$

- Pour $i, j \in X(\Omega)$ avec $i \leq j$, on obtient

$$\begin{aligned} P(i \leq X \leq j) &= P(i - 1/2 < X \leq j + 1/2) \\ &\simeq \Phi\left(\frac{j + 1/2 - E(X)}{\sqrt{V(X)}}\right) - \Phi\left(\frac{i - 1/2 - E(X)}{\sqrt{V(X)}}\right) \end{aligned}$$

Application à la loi binomiale.
Si $X \sim \mathcal{B}(n, \alpha)$, alors pour n assez grand,

$$X \approx \mathcal{N}(E(X), V(X)) = \mathcal{N}(n\alpha, n\alpha(1 - \alpha))$$

et donc

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(k - 1/2 < X \leq k + 1/2) \\ &\simeq \Phi\left(\frac{k + 1/2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{k - 1/2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \end{aligned}$$

Exemple. Supposons que $X \sim \mathcal{B}(50, 0.4)$. Calculer $P(X = 20)$.

1) Donner la solution exacte.

2) Donner une solution approchée.

Solution.

Application à la loi de POISSON. Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors pour λ assez grand,

$$X \approx \mathcal{N}(E(X), V(X)) = \mathcal{N}(\lambda, \lambda)$$

et donc

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(k - 1/2 < X \leq k + 1/2) \\ &\simeq \Phi\left(\frac{k + 1/2 - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) - \Phi\left(\frac{k - 1/2 - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) \end{aligned}$$

Exemple. Supposons que $X \sim \mathcal{P}(25)$. Calcules $P(X = 20)$.

1) Donner la solution exacte.
2) Donner une solution approchée.

Solution.

Free Online Statistical Table :

http://stattrek.com/online-calculator/binomial.aspx (loi binomiale)

http://stattrek.com/online-calculator/normal.aspx (loi normale)