I) Inégalités de Markov et Tchebychev

$|X| > a \iff (X < -a$ ou $X > a)$

Théorème 1.13

$$P(|X - E(X)| > a) = P(|X - E(X)|^2 > a^2)$$

$$\leq \frac{E((X - E(X))^2)}{a^2}$$

$$\leq \frac{V(X)}{a^2}$$

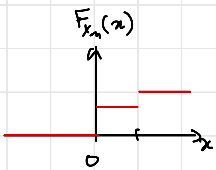
II) Convergence en loi

var. aléa. discrète $\Rightarrow$ f° de répartit° non continue

Exemple

$\Omega_{X_n} = \{0, 1\}$ $\quad P_X(x) = P(X = x)$ $\quad \Big| \quad F_X(x) = \sum_{r \leq x} P_X(r)$

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{n} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

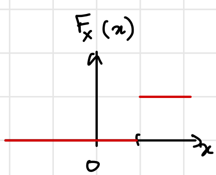


$C(F_X) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Remarque $X_n \sim B(1 - \frac{1}{n})$

- $X = 1 \Rightarrow X \sim \delta_1$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ 1 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$



cvg de $(F_{X_n})_{n \geq 1}$:

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

si $x < 0$, $F_{X_n}(x) = 0 \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 = F_X(x)$

si $0 \leq x < 1$, $F_{X_n}(x) = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 = F_X(x)$

si $x > 1$, $F_{X_n}(x) = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 = F_X(x)$

$F_{X_n}(x) \xrightarrow{cvs} F_X(x)$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

$\Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ avec $X \sim \delta_1$

$X_n \xrightarrow{P} X$ $\qquad x \to |x|$ est $\mathcal{C}^0$

$|X_n| \xrightarrow{\mathcal{L}} |X|$

$e^{X_n} \to e^X$ $\qquad x \mapsto e^x$ est $\mathcal{C}^0$

$\sin X_n \to \sin X$ $\qquad x \to \sin x$ est $\mathcal{C}^0$

II) Convergence en probabilité

Exemple

$X(\Omega) = \{0, 1\}$ → Bernoulli $\qquad X \sim \mathcal{B}(\frac{1}{3})$ $\qquad F_X(x) = \sum_{t \leq x} P_X(t)$

$$P_X(x) = \begin{cases} 2/3 & \text{si } x = 0 \\ 1/3 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad X_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)X$$

M1 : f° répartit°

$|X_n - X| = |(1+\frac{1}{n})X - X| = |\frac{1}{n}X| = \frac{X}{n}$

$$\forall \varepsilon > 0, \ P(|X_n - X| \leq \varepsilon) = P(\frac{X}{n} \leq \varepsilon) = P(X \leq n\varepsilon) = F_X(n\varepsilon) = \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{si } n\varepsilon < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \geq n\varepsilon \end{cases}$$

on a $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ $\ 1 \leq n_0 \varepsilon$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad 1 \leq n_0 \varepsilon \leq n\varepsilon$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad F_X(n\varepsilon) = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

Ainsi. $P(|X_n - X| \leq \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$

M2 : inégalité de Markov

$$\forall \varepsilon > 0 : 0 \leq P(|X_n - X| > \varepsilon) = P(\frac{X}{n} > \varepsilon) = P(X > n\varepsilon) \leq \frac{E[X]}{n\varepsilon} = \frac{1}{3n\varepsilon} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\Rightarrow P(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Exemple

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-nx} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Π_1 : usage de la f° de répartit°

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P(|X_n - 0| \leq \varepsilon) = P(|X_n| \leq \varepsilon) = P(X_n \leq \varepsilon) = F_{X_n}(\varepsilon) = 1 - e^{-n\varepsilon} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$$\Rightarrow P(|X_n - 0| \leq \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} 0$$

Π_2 : inégalité de Markov

$$\forall \varepsilon > 0, \quad 0 \leq P(|X_n - 0| > \varepsilon) = P(X_n > \varepsilon) \leq \frac{E[X_n]}{\varepsilon} = \frac{1}{n\varepsilon} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow P(|X_n - 0| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow X_n \xrightarrow{P} 0$$

IV) Convergence en moyenne

Exemple 1 calculer $E(|X_n - X|^2) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

cas dans L^2

Notat° : $X_n \xrightarrow{L^2} X$

$E[X] = \sum_{x \in \Omega_X} x\, p_X(x)$ pour discrète

$E[g(X)] = \sum_{x \in \Omega_X} g(x)\, p_X(x)$

$$E[|X_n - 0|^2] = E[|X_n|^2] = \sum_{x \in \Omega_{X_n}} |x|^2 p_{X_n}(x)$$

$$= |0|^2 p_{X_n}(0) + |n|^2 p_{X_n}(n)$$

$$= 0 + n^2 \frac{1}{n^3}$$

$$= \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow E[|X_n - 0|^2] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow X_n \xrightarrow{L^2} 0$$

cas dans L^1

$$E[|X_n-0|] = E[|X_n|] = \sum_{x\in\Omega_{X_n}} |x| \, p_{X_n}(x)$$

$$= |0|\, p_{X_n}(0) + |n|\, p_{X_n}(n)$$

$$= n \frac{1}{n^3}$$

$$= \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow E[|X_n-0|] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow X_n \xrightarrow{L^1} 0$$

Exemple 2

$$X_n(\Omega) = \{0, n\} \qquad p_{X_n}(x) = \begin{cases} 1-\frac{1}{n^2} & \text{si } x=0 \\ \frac{1}{n^2} & \text{si } x=n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$E[|X_n-0|] = E[|X_n|] = \sum_{x\in\Omega_{X_n}} |x| \, p_{X_n}(x)$$

$$= |0|\, p_{X_n}(0) + |n|\, p_{X_n}(n)$$

$$= n \frac{1}{n^2}$$

$$= \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \Rightarrow X_n \xrightarrow{L^1} 0$$

$$E[|X_n-0|^2] = E[|X_n|^2] = |0|^2 p_{X_n}(0) + |n|^2 p_{X_n}(n)$$

$$= n^2 \frac{1}{n^2}$$

$$= 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad \Rightarrow \text{ne marche pas}$$

$$E[|X_n-0|^3] = n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

Exemple 1 (4.3)

$$X_n(\Omega) = \{-1, 0, 1\} \qquad p_{X_n}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2n} & \text{si } x=-1 \\ 1-\frac{1}{n} & \text{si } x=0 \\ \frac{1}{2n} & \text{si } x=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$E[|X_n - 0|^r] = E[|X_n|^r] = \sum_{x \in \Omega_{X_n}} |x|^r P_{X_n}(x)$$

$$= |-1|^r \frac{1}{2n} + |0|^r \left(1 - \frac{1}{n}\right) + |1|^r \frac{1}{2n}$$

$$= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}$$

$$= \frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow X_n \xrightarrow{L^r} 0$$

Exemple 2

$X_n \sim U([0, \frac{1}{n}]) \Leftrightarrow f_{X_n}(x) = n \mathbb{I}_{[0, \frac{1}{n}]}(x)$

$$E[|X_n - 0|^r] = E[|X_n|^r] = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^r f_{X_n}(x)\,dx$$

$$= n \int_0^{1/n} x^r \,dx$$

$$= n \left[\frac{x^{r+1}}{r+1}\right]_0^{\frac{1}{n}} = n \frac{1}{n^{r+1}(r+1)} = \frac{1}{n^r(r+1)} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{car } r > 0$$

Donc $X_n \xrightarrow{L^r} 0$

VI) V.A.Rs indépendantes et identiquement distribuées

Recap :

X continu	X discret
P_X (loi)	P_X (loi)
F_X f.r.	F_X f.r.
f_X f.d.p.	P_X f.m.p. (fonction de masse de proba)

Propriété 6.4

Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{et} \quad M_n = \frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

- *S_n est appelée somme partielle d'ordre n de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.*
- *M_n est appelée moyenne arithmétique d'ordre n de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.*

Note. Notons que S_n et M_n, étant des sommes de variables aléatoires, sont elles-mêmes des variables aléatoires.

Remarque. En statistique, M_n est notée $\overline{X}_n$ et est appelée moyenne empirique.

Propriété 6.4 *Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.rs.*

- *Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est identiquement distribuée et $E(|X_1|) < \infty$, alors, $\forall n \in \mathbb{N}^*$*
$$E(S_n) = nE(X_1) \quad \text{et} \quad E(M_n) = E(X_1)$$
- *Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ indépendante identiquement distribuée et $E(|X_1|^2) < \infty$, alors, $\forall n \in \mathbb{N}^*$*
$$V(S_n) = nV(X_1) \quad \text{et} \quad V(M_n) = \frac{V(X_1)}{n}$$

Preuve.

- $E[S_n] = E[X_1 + \dots + X_n]$
$= E[X_1] + \dots + E[X_n]$ par linéarité de $E[\cdot]$
$= n\, E[X_1]$ car les X_i sont identiques

- $E[M_n] = E[\frac{1}{n} S_n]$
$= \frac{1}{n} E[S_n]$ par linéarité de $E[\cdot]$
$= E[X_1]$

- $V(S_n) = V(X_1 + \dots + X_n)$
$= V(X_1) + \dots + V(X_n)$ car les X_i sont indépendants
$= n\, V(X_1)$ car les X_i sont identiques

- $V(M_n) = V(\frac{1}{n} S_n)$
$= \frac{1}{n^2} V(S_n)$
$= \frac{V(X_1)}{n}$

VIII) Loi des grands nombres

Théorème 7.1

Mq $M_n \xrightarrow{P} E(X_1)$

On utilise l'inégalité de Chebyshev, $\forall \varepsilon > 0$

$$P(|M_n - E(X_1)| > \varepsilon) = P(|M_n - E(M_n)| > \varepsilon) \leq \frac{V(M_n)}{\varepsilon^2} = \frac{V(X_1)}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\Rightarrow M_n \xrightarrow{P} E[X_1]$

Remarque LfGN

$|M_n - E[X_1]| \leq \varepsilon \iff -\varepsilon \leq M_n - E[X_1] \leq \varepsilon$
$\iff E[X_1] - \varepsilon \leq M_n \leq E[X_1] + \varepsilon$

IX) Applicat° du Central Limit Theorem

Exemple (9.4)

$E(X_1) = \frac{1}{2}$ $V(X_1) = \frac{1}{4}$

$n = 100 \geq 30$: le CLT s'applique

$$M_{100} \approx N(E(M_{100}), V(M_{100})) = N\left(E[X_1], \frac{V[X_1]}{n}\right)$$

$$= N\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{400}\right)$$

Exemple (9.5)

$n = 400 \geq 30$, le CLT s'applique

$$X_i = \begin{cases} 1 \text{ si face} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \qquad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$P(S_{400} \geq 205)$ $\quad P(S^*_{400} > k) = 1 - F_{S^*_{400}}(k) \simeq \phi(k)$

$S_n \approx N\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{4}\right) \Rightarrow S_{400} \approx N(200, 100)$

$S_{400} \sim B(100, \frac{1}{2})$

$$P(S_n \geq 205) = 1 - P(S_n < 205)$$
$$= 1 - \sum_{k=0}^{204} \binom{400}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{400-k}$$

$$P(S_{400} > 205) = P(S_{400} - E(S_{400}) > 205 - E(S_{400}))$$
$$= P\left(\frac{S_{400} - E(S_{400})}{\sigma(S_{400})} > \frac{205 - E(S_{400})}{\sigma(S_{400})}\right)$$
$$= P\left(S^*_{400} > \frac{205 - 200}{\sqrt{400 \times \frac{1}{4}}}\right)$$
$$= P\left(S^*_{400} > \frac{5}{10} = \frac{1}{2}\right)$$
$$= 1 - F_{S^*_{400}}\left(\frac{1}{2}\right) \simeq 1 - \phi\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - 0{,}6915$$
$$= 0{,}3085$$
$$\simeq 31\%$$
$$= 1 - P\left(S^*_n \leq \frac{1}{2}\right)$$

Exemple

$E(X_i) = 2$ min

$V(X_i) = 1$ min^2

50 clients

Suivons l'algorithme :

1) X_i : "temps de service du i-ème client"

X : "temps total que le caissier passe à servir les 50 clients"

$X = X_1 + \ldots + X_n \qquad n = 50$

Supposons que les X_i sont iid

$X \sim N(0,1)$ $\quad X = \frac{X - E[X]}{\sqrt{V[X]}}$

2) $E[X] = n\,E[X_1] = 100$

$V[X] = n\,V[X_1] = 50$

3) $n = 50 \geq 30 \Rightarrow$ le CLT s'applique ici

$$X^* = \frac{X - E[X]}{\sqrt{V[X]}} = \frac{X - 100}{\sqrt{50}}$$

D'où : $P(90 < X \leq 110) = \dots = P(-\sqrt{2} < X^* \leq \sqrt{2})$

$$\begin{aligned} X^* &\approx N(0,1) \\ &\simeq \phi(\sqrt{2}) - \phi(-\sqrt{2}) \\ &\simeq 2\phi(\sqrt{2}) - 1 \\ &\simeq 0,8414 \end{aligned}$$

9.5) Approximat° normale pour la loi binomiale

$E[X] = \sum_{x \in \mathbb{R}} x\,p_X(x)$ et $E[X] = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\,dx$

Exemple

$X \sim B(n,\alpha) \Leftrightarrow P_X(i) = P(X=i) = \binom{n}{i} \alpha^i (1-\alpha)^{n-i} \quad \forall i \in [\![0, n]\!]$

$P_X(0) = 10^{-39} \Leftrightarrow \binom{n}{0}(0,4)^n = 10^{-39} \Leftrightarrow 0,4^n = 10^{-39} \Leftrightarrow n \ln(0,4) = -39 \ln(10)$

$\Leftrightarrow n = -39 \frac{\ln(10)}{\ln(0,4)}$

$$\left.\begin{aligned} n &= 98 \geq 0 \\ n\alpha &= 58,8 \geq 5 \\ n(1-\alpha) &= 39,2 \geq 5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{on peut utiliser le CLT}$$

$X \approx N(58.8, (4.85)^2)$ $\quad n\alpha(1-\alpha) = 58,8(0,4) = 23,52 = (4,85)^2$

$$P(E(x) - k \leq x \leq E(x) + k) = P\left(-\frac{k}{\sigma(x)} \leq \frac{x - E(x)}{\sigma(x)} \leq \frac{k}{\sigma(x)}\right)$$

$$\underbrace{}_{X^* \sim \mathcal{N}(0,1)}$$

$$= \phi\left(\frac{k}{\sigma(x)}\right) - \phi\left(\frac{-k}{\sigma(x)}\right)$$

$$= 2\,\phi\left(\frac{k}{\sigma(x)}\right) - 1 = 0,95$$

$$\Leftrightarrow 2\phi\left(\frac{k}{\sigma(x)}\right) = 1,95$$

$$\Leftrightarrow \phi\left(\frac{k}{\sigma(x)}\right) = 0,975$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{\sigma(x)} = 1,96$$

$$\Leftrightarrow k = 1,96 \times \underbrace{4,85}_{\sigma(x)} = 9,506$$

9.6) Approximat° normale pour la loi de Poisson

Propositi° 9.11

loi de poisson

$$E[X] = \sum_{x \in \mathbb{R}} x\, p_X(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} k\, p_X(k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda \lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= e^{-\lambda} \lambda \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!}$$

$$= e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda}$$

$$= \lambda$$

$\Rightarrow E[X] = \lambda$ si X suit la loi de Poisson

$$E[X(X-1)] = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^2 \lambda^{k-2}}{(k-2)!}$$

$$= e^{-\lambda} \lambda^2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!}$$

$= e^{-\lambda} \lambda^2 e^{\lambda}$

$= \lambda^2$

$E[X^2] - E[X] = \lambda^2$

$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$

$= (E[X] + \lambda^2) - \lambda^2$

$= E[X]$

$= \lambda$

Ainsi $X \approx N(\lambda, \lambda)$

Exemple

$X \sim P(\lambda)$ avec $\lambda = 100$

On sait que $E[X] = V[X] = \lambda = 100$

① La solut° exacte est :

$$P(X \geqslant 120) = e^{-100} \sum_{k=120}^{\infty} \frac{(100)^k}{k!}$$

$$= 1 - P(X \leqslant 119) = 1 - e^{-100} \sum_{k=0}^{119} \frac{(100)^k}{k!}$$

② Solut° approximative

- $P(X \geqslant 120) = 1 - P(X \leqslant 119)$

$= 1 - P\left(\frac{X - 100}{10} \leqslant \frac{X - 119}{10}\right)$

↪ valeur centrée réduite qui suit une loi normale

$= 1 - P\left(X^* \leqslant \frac{19}{10}\right)$

⇒ on ne va pas l'utiliser

- $P(X \geqslant 120) = P\left(\frac{X - 100}{10} \geqslant \frac{120 - 100}{10}\right) = P(X^* \geqslant 2)$

$= 1 - P(X^* < 2)$

$\simeq 1 - P(X^* \leqslant 2)$

$\simeq 0{,}0228$

9.7) Correct° de continuité des vars discrètes

Exemple

$X \sim \mathcal{B}(50, 0.4)$

① $P(X=20) = \binom{50}{20}(0,4)^{20}(0,6)^{30}$ et $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

$\simeq 0,1145$ comment ?

② Solut° approchée

$P(X=20) = P(20-\frac{1}{2} < X \leq 20+\frac{1}{2})$

$\mu = np = 50 \times 0,4 = 20$

$= F_X(20+\frac{1}{2}) - F_X(20-\frac{1}{2})$

• Pour $k \in X(\Omega)$, on obtient

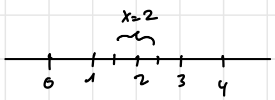
$$P(X=k) = P(k-1/2 < X \leq k+1/2) \simeq \Phi\left(\frac{k+1/2-E(X)}{\sqrt{V(X)}}\right) - \Phi\left(\frac{k-1/2-E(X)}{\sqrt{V(X)}}\right)$$

$= \phi\left(\frac{20+\frac{1}{2}-20}{\sqrt{12}}\right) - \phi\left(\frac{20-\frac{1}{2}-20}{\sqrt{12}}\right)$

$= \phi(0,14) - \phi(-0,14)$

$= 2\phi(0,14) - 1$

$= 0,1113$



$P(X=2) = P(1,5 < X \leq 2,5)$

Exemple

$X \sim P(25)$

① $P(X=20) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{20}}{20!} = e^{-25}\frac{25^{20}}{20!} \simeq 0,0519$

② $\lambda = 25 \geq 15$ Le CLT s'applique

$P(X=20) = P(19,5 < X \leq 20,5)$

$= \phi\left(\frac{20,5-20}{\sqrt{25}}\right) - \phi\left(\frac{19,5-20}{\sqrt{25}}\right)$

$= \phi(-0,9) - \phi(-1,1)$

$= 1-\phi(0,9) - (1-\phi(1,1))$

$= \phi(1,1) - \phi(0,9)$

$= 0,0484$