Variables aléatoires réelles continues

Khalid El Amine I.
Department of Mathematics

★★★

Dans tout ce chapitre :

- Ω est un univers.
- $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace probabilisable.
- $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé.
- $\mathbb{R}$ sera toujours muni de la tribu de Borel, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.
- Toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans l'espace probabilisable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
- On considère les variables aléatoires réelles X telles que $X(\Omega)$ est non discret.

1 Variable aléatoire réelle

Définition 1.1 (Variable aléatoire réelle)
On appelle variable aléatoire réelle (v.a.r. en abrégé) sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute fonction

$$X : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

vérifiant :

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{A}, \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

- *$X(\Omega)$ est appelé univers image de Ω par X.*

Proposition 1.2 *Soit $X : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction. Alors*

$$X \text{ est une v.a.r. sur } (\Omega, \mathcal{A}), \text{ si et seulement si, } X^{-1}(]-\infty, x]) \in \mathcal{A}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Preuve.

1.1 Loi d'une variable aléatoire réelle

Définition 1.3 (Loi d'une v.a.r.)
Soit $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une v.a.r.. Soit P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$. La fonction

$$\begin{array}{rcl} P_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ B & \longmapsto & P_X(B) = P(X^{-1}(B)) \end{array}$$

est appelée probabilité image de P par X, ou loi de X sous P.

Remarque. P_X est parfois notée $\mathcal{L}(X)$ et simplement appelée loi de X.

Proposition 1.4 *Soit $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une v.a.r.. Soit P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Alors*

$$P_X \text{ est une probabilité sur } (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

i.e

$$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X) \text{ est un espace probabilisé.}$$

Proof.

Remarque. Dans la suite, on notera simplement $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ au lieu de $X : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

1.2 Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle

Définition 1.5 (Fonction de répartition d'une v.a.r.)
Soit X une v.a.r.. La fonction

$$\begin{array}{rcl} F_X : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & F_X(x) = P_X(]-\infty, x]) \end{array}$$

est appelée fonction de répartition de X, (abrégée en f.r.).

Remarque.

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) \in [0, 1]$.
- $F_X(x)$ représente la probabilité de toutes les réalisations inférieures ou égales au réel x.
- La f.r. F_X est aussi appelée fonction de distribution cumulative de X, (abrégée en f.d.c.).

Proposition 1.6 *Soit X une v.a.r. et F_X sa f.r.. Alors :*

1) *F_X est croissante sur $\mathbb{R}$*
2) *$\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$*
3) *F_X est continue à droite sur $\mathbb{R}$*

Preuve.

Remarque. Comme F_X est monotone et bornée, elle admet une limite (finie) à gauche en tout point de $\mathbb{R}$.

On rappelle le théorème suivant

Théorème 1.7 *Si une fonction est monotone sur un intervalle de $\mathbb{R}$, alors l'ensemble des points où elle n'est pas continue est fini ou dénombrable.*

Remarque. Toute f.r. est donc continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement sur une partie discrète.

Proposition 1.8 *Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.*
Si

1) *F est croissante sur $\mathbb{R}$*
2) *$\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$*
3) *F est continue à droite sur $\mathbb{R}$*

Alors, F est la f.r. d'une certaine v.a.r..

Proof.

Notations. Pour alléger les notations, on écrira :

- $\{X \in B\}$ pour l'ensemble $X^{-1}(B)$ où $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, i.e. :
$$\{X \in B\} = X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(w) \in B\}$$
De même :
- $\{X = x\} = X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega : X(w) = x\}$, où $x \in \mathbb{R}$.
- $\{X \leq x\} = X^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}$
- $\{X < x\} = X^{-1}(]-\infty, x[) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\}$
- $\{a < X \leq b\} = X^{-1}(]a, b]) = \{\omega \in \Omega : a < X(\omega) \leq b\}$
- etc.
- $\forall a \in \mathbb{R}$
$$F_X(a^-) = \lim_{x \to a^-} F_X(x) \text{ and } F_X(a^+) = \lim_{x \to a^+} F_X(x)$$

Proposition 1.9 *Soit X une v.a.r. et F_X sa f.r.. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Alors :*

1) $P(\{X \leq a\}) = F_X(a)$

2) $P(\{X > a\}) = 1 - F_X(a)$

3) $P(\{a < X \leq b\}) = F_X(b) - F_X(a)$

4) $P(\{X = a\}) = F_X(a^+) - F_X(a^-)$

Preuve.

Proposition 1.10 *Soit X et Y deux v.a.r. sur le même $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Alors*

$$F_X = F_Y, \textit{ si et seulement si, } P_X = P_Y$$

Preuve.

Remarque. La fonction de répartition F_X d'une v.a.r. caractérise complètement sa loi P_X.

1.3 Indépendance de variables aléatoires réelles

1.3.1 Indépendance de deux variables aléatoires réelles

Définition 1.11 (Indépendance de deux v.a.rs)
Sot X et Y deux v.a.rs sur le même $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. X et Y sont dites indépendantes, si et seulement si,

$$\forall B, B' \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \textit{ les événement } X^{-1}(B) \textit{ et } Y^{-1}(B') \textit{ sont indépendants}$$

Notation. Notons $\mathcal{I}$, l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$.

Proposition 1.12 *Soit X et Y deux v.a.rs sur le même $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.*
Les assertions suivantes sont équivalentes

1) *X et Y sont indépendantes.*

2) $\forall (B, B') \in (\mathcal{B}(\mathbb{R}))^2$, $\quad P(\{X \in B\} \cap \{Y \in B'\}) = P(\{X \in B\})P(\{Y \in B'\})$

3) $\forall (I, I') \in (\mathcal{I})^2$, $\quad P(\{X \in I\} \cap \{Y \in I'\}) = P(\{X \in I\})P(\{Y \in I'\})$

4) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\quad P(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\}) = P(\{X \leq x\})P(\{Y \leq y\})$

Preuve.

Rappel. Si A est un événement, alors sa fonction indicatrice I_A est une v.a.r..

Proposition 1.13 *Deux événements A et A' sont indépendant, si et seulement si, leurs fonctions indicatrices I_A et $I_{A'}$ sont indépendantes.*

Proof.

1.3.2 Indépendance d'une suite de variables aléatoires réelles

Définition 1.14 (Indépendance d'une suite finie de v.a.rs)
Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n > 1$. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ une suite finie de n v.a.rs sur le même $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
La suite $(X_1, \ldots, X_n)$ est dite indépendante, si et seulement si,

$$\forall (B_1, \ldots, B_n) \in (\mathcal{B}(\mathbb{R}))^n, \textit{ la suite d'événements } (X_1^{-1}(B_1), \ldots, X_n^{-1}(B_n)) \textit{ est indépendante}$$

Proposition 1.15 *Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n > 1$. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ une suite finie de n v.a.rs sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Les assertions suivantes sont équivalentes*

1) $(X_1, \ldots, X_n)$ *est une suite indépendante*

2) $\forall (B_1, \ldots, B_n) \in (\mathcal{B}(\mathbb{R}))^n \ , \ P(\{X_1 \in B_1\} \cap \ldots \cap \{X_n \in B_n\}) = P(\{X_1 \in B_1\}) \cdots P(\{X_n \in B_n\})$

3) $\forall (I_1, \ldots, I_n) \in (\mathcal{I})^n \ , \ P(\{X_1 \in I_1\} \cap \ldots \cap \{X_n \in I_n\}) = P(\{X_1 \in I_1\}) \cdots P(\{I_n \in B_n\})$

4) $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ , \ P(\{X_1 \leq x_1\} \cap \ldots \cap \{X_n \leq x_n\}) = P(\{X_1 \leq x_1\}) \ldots P(\{X_n \leq x_n\})$

Proof.

Proposition 1.16 *Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n > 1$. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ une suite finie de n v.a.rs sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, soit $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque. Alors*

$$(X_1, \ldots, X_n) \textit{ est indépendante} \implies (f_1(X_1), \ldots, f_n(X_n)) \textit{ est indépendante}$$

Preuve.

Définition 1.17 (Indépendance d'une suite infinie de v.a.rs)
Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.rs sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est dite indépendante, si et seulement si, pour toute partie finie I de $\mathbb{N}^*$, avec $|I| > 1$, la suite finie $(X_i)_{i \in I}$ est indépendante.

2 Variable aléatoire réelle continue

Définition 2.1 (v.a.r. continue)
Une v.a.r. X est dite continue, si et seulement si, sa f.r. F_X est continue sur $\mathbb{R}$.

Proposition 2.2 *Soit X une v.a.r.. Alors*

$$X \text{ est continue, si et seulement si, } P(\{X = x\}) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Preuve.

Remarque. Soit $a \in \mathbb{R}$. $P(\{X = a\}) = 0$ n'implique pas que l'événement $\{X = a\}$ est impossible. Si c'était le cas, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'événement $\{X = x\}$ serait impossible et X ne pourrait prendre aucune valeur.

Proposition 2.3 *Soit X une v.a.r. continue. Alors, $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,*

$$B \text{ est discret } \Longrightarrow P(\{X \in B\}) = 0$$

Preuve.

Exercice. Supposons que X soit une v.a.r. continue.

1) Que vaut $P(\{X \in \mathbb{Q}\})$?

2) Que vaut $P(\{X \in [0,1] \cap \mathbb{Q}\})$?

Solution.

Proposition 2.4 *Soit X une v.a.r. continue de f.r. F_X. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$:*

- $P(\{X < a\}) = P(\{X \leq a\}) = F_X(a)$
- $P(\{X \geq a\}) = P(\{X > a\}) = 1 - F_X(a)$
- $P(\{a < X < b\}) = P(\{a \leq X < b\}) = P(\{a \leq X \leq b\}) = P(\{a < X \leq b\}) = F_X(b) - F_X(a)$

Preuve. Par application de de l'égalité $P(\{X = x\}) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ et de la définition d'une f.r. d'une v.a.r..

3 Variable aléatoire réelle absolument continue

3.1 Fonction de densité de probabilité

Définition 3.1 (Fonction de densité de probabilité)
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.
On dit que f est une fonction de densité de probabilité (f.d.p. en abrégé) sur $\mathbb{R}$, si et seulement si,

(1) $f(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

(2) f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf sur une partie finie.

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Exemple. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = |x| I_{[-1,1]}$$

Vérifier que f est une fonction de densité de probabilité.

Solution.

Remarque. Soit f une fonction de densité de probabilité.

- f peut ne pas être bornée.
- $(f \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1) \nRightarrow (f \leq 1$ sur $\mathbb{R})$; contrairement à la fonction de masse de probabilité. $f(x)$ ne correspond pas à une valeur de probabilité.

Exemple. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définit par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{|x|}} & \text{si } 0 < |x| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f est fonction de densité de probabilité.

Solution.

3.2 Variable aléatoire réelle absolument continue

Définition 3.2 (v.a.r. absolument continue)
Une v.a.r. X est dite absolument continue (ou de loi absolument continue), si et seulement si, il existe une f.d.p. noté f_X, telle que :

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \qquad P(\{X \in B\}) = \int_B f_X(x)dx$$

Dans ce cas

- *f_X est alors appelée fonction de densité de probabilité de X.*
- *$S_X = \{x \in \mathbb{R} \ : \ f_X(x) \neq 0\}$ est appelé support de la loi de X.*

Rappel. La loi de probabilité d'une v.a.r. X, noté P_X, est une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Elle est définit par

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \qquad P_X(B) = P(\{X \in B\})$$

Remarque. Il n'y a pas d'unicité de la f.d.p. pour une v.a.r. X.
Si f_X est une f.d.p. de X, alors n'importe quelle f.d.p. f égale à f_X sauf (par exemple) sur un ensemble fini de points est aussi une f.d.p. de X. Par exemple

$$f_1(x) = I_{[0,1]} \ ; \ f_2(x) = I_{]0,1]} \ ; \ f_3(x) = I_{[0,1[} \ ; \ f_4(x) = I_{]0,1[}$$

sont des f.d.p. de la même v.a.r..

Exemple. Si X est une v.a.r. absolument continue de f.d.p. f_X, alors :

$$P(\{X \in [1,3]\}) = \int_{[1,3]} f_X(x)dx = \int_1^3 f_X(x)dx$$

On rappelle que $\{X \in [1,3]\}$ se note $\{1 \leq X \leq 3\}$.

Proposition 3.3 *Soit X une v.a.r..*

$$\textit{Si } X \textit{ est absolument continue, alors } X \textit{ est continue}$$

Preuve. $\forall a \in \mathbb{R}$

$$P(\{X = a\}) = P(\{X \in \{a\}\}) = \int_{\{a\}} f_X(x)dx = \int_a^a f_X(a)dx = f_X(a)\int_a^a 1dx = f_X(a) \times 0 = 0$$

3.3 Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle absolument continue

Théorème 3.4 *Soit X une v.a.r. absolument continue, de f.d.p. f_X. La f.r. de X, notée F_X est donnée par :*

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Preuve. Vient de la formule de la loi d'une v.a.r. absolument continue.

$$F_X(x) = P(\{X \leq x\}) = P(\{X \in]-\infty, x]\}) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

Graphe de F_X:

Exemple. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = c(1-x)I_{[0,1]}(x)$, où $c \in \mathbb{R}$.

1) Déterminer la constante c pour que f soit une f.d.p.. Tracer la courbe de f.
2) Supposons que X soit une v.a.r. absolument continue ayant f pour f.d.p..
   Déterminer F_X, la f.r. de X et dessiner sa courbe.

Solution.

Proposition 3.5 *Soit X une v.a.r. absolument continue de f.d.p. f_X et de f.r. F_X.*
Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$:

- $P(\{X < a\}) = P(\{X \leq a\}) = F_X(a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(t)dt$
- $P(\{X \geq a\}) = P(\{X > a\}) = 1 - F_X(a) = \int_{a}^{+\infty} f_X(t)dt$
- $P(\{a < X \leq b\}) = F_X(b) - F_X(a) = \int_{a}^{b} f_X(t)dt$
- $P(\{a < X < b\}) = P(\{a \leq X < b\}) = P(\{a \leq X \leq b\}) = P(\{a < X \leq b\})$

Preuve. Par application de de l'égalité $P(\{X = x\}) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$; de la définition d'une f.r. d'une v.a.r. et de la définition de la loi d'une v.a.r. absolument continue.

Représentations graphique de $P(\{X < a\})$, $P(\{X \geq a\})$ et $P(\{a < X < b\})$:

Proposition 3.6 *Soit X une v.a.r. et F_X sa f.r..*
Si X est absolument continue de f.d.p. f_X, alors

1) *F_X est continue sur $\mathbb{R}$.*

2) *F_X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, sauf sur une partie finie.*

3) *Si f_X est continue en $x_0 \in \mathbb{R}$, alors F_X est dérivable en ce point et on a :*

$$F_X^{'}(x_0) = f_X(x_0)$$

Preuve.

La réciproque du résultat ci-dessus est donnée par le

Théorème 3.7 *Soit X une v.a.r. de f.r. F_X.*
Si F_X vérifie :

(1) *F_X est continue sur $\mathbb{R}$.*

(2) *F_X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, sauf en un nombre fini de points.*

Alors

1) *X est une v.a.r. absolument continue.*

2) *Toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que*

$$\begin{cases} f \geq 0 & \textit{sur } \mathbb{R} \\ f(x) = F_X^{'}(x) & \textit{en tout point } x \textit{ où } F_X \textit{ est dérivable} \end{cases}$$

est une f.d.p. de X.

Preuve.

Remarque Importante. Si X est une v.a.r. absolument continue de f.r. F_X, alors F_X est dérivable presque partout (théorème de différentiation de LEBESGUE). Ceci permet d'associer à X une f.d.p. f_X de façon *canonique*. Dans la pratique on prendra

$$f_X(x) = \begin{cases} F_X'(x) & \text{en tout point } x \text{ où } F_X \text{ est dérivable} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Exemple. Soit X une v.a.r. dont la f.r. F_X est définit par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 0 \\ x & \text{if } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{if } 1 \leq x \end{cases}$$

Montrer que X est absolument continue et proposer une f.d.p. de X.

Solution.

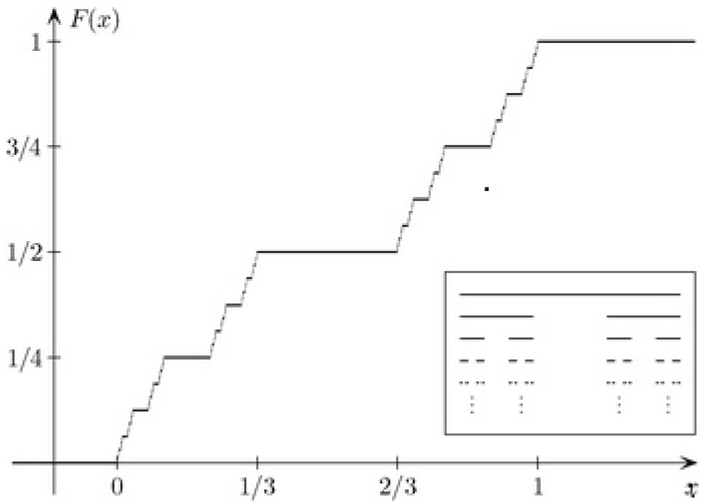

Figure 1: Fonction de CANTOR

Discussion. Existence de v.a.r. continue mais non absolument continue.

Dans tous les cas raisonnables, une v.a.r. continue aura une f.d.p. ; c'est-à-dire qu'elle sera absolument continue. Toutefois, il est possible d'établir l'existence de v.a.rs qui sont continues mais pas absolument continues. Un exemple remarquable est la loi de CANTOR. La f.r. F de la loi de CANTOR est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable (de dérivée nulle) presque partout, mais elle n'est pas absolument continue.

La loi de CANTOR est une loi de probabilité singulière dont le support est l'ensemble de Cantor. Sa f.r. est représentée par l'escalier de CANTOR, aussi appelé escalier du diable (voir figure 1).

La loi de Cantor a les propriétés suivantes :

- Elle n'est pas absolument continue (par rapport à la mesure de Lebesgue), car elle n'admet pas de fonction de densité de probabilité.
- Elle n'est pas discrète, car elle n'admet pas de fonction de masse de probabilité.
- Elle n'est pas non plus une loi mixte (des deux lois citées ci-dessus).
- Son support est non discret et de mesure de LEBESGUE nulle.

4 Moments d'une variable aléatoire réelle absolument continue

On abrégera souvent variable aléatoire réelle absolument continue en v.a.r.a.c..

4.1 Espérance

Définition 4.1 (Espérance)
Soit X une v.a.r.a.c. de f.d.p. f_X. On dit que X admet une espérance, si est seulement si,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x)dx < +\infty$$

Dans ce cas, l'espérance de X est notée $E(X)$ et elle est définie par :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx$$

Remarque. $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x) dx$ existe toujours, c'est un élément de $[0, +\infty]$.
La finitude de cette intégrale garantie que l'espérance $E(X)$ est bien définie.

Exemple. Loi de Cauchy standard

Soit X une v.a.r.a.c. de f.d.p.

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Montrer que X n'admet pas d'espérance.

Solution.

4.2 Propriétés de l'espérance

Théorème 4.2 (Théorème de transfert)
Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une v.a.r.a.c. de f.d.p. f_X.
Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux (g mesurable suffit). Alors

- *La v.a.r. $g(X)$ est absolument continue.*
- *Si $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| f_X(x) dx < \infty$, alors, $g(X)$ admet une espérance. Elle est donnée par*

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx$$

Preuve.

Exemple. Soit X une v.a.r.a.c. de f.d.p.

$$f_X(x) = 3x^2 I_{[0,1]}(x)$$

Que vaut (a) $E(X)$? (b) $E(X^2)$? (c) $E(X + X^2)$?

Solution.

Corollaire 4.3 *Soit X une v.a.r.a.c. admettant une espérance. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Alors la v.a.r. $aX + b$ est absolument continue et admet un espérance donnée par*

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

Preuve.

Remarque. En paticulier

$$E(aX) = aE(X) \quad ; \quad E(a) = a$$

Proposition 4.4 (Croissance de l'espérance)
Soit X et Y deux v.a.r.a.cs. sur le même $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, chacune admettant une espérance. Alors

$$Y \leq X \quad \Longrightarrow \quad E(Y) \leq E(X)$$

En particulier :

$$0 \leq X \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq E(X)$$

et pour $a, b \in \mathbb{R}$:

$$a \leq X \leq b \quad \Longrightarrow \quad a \leq E(X) \leq b$$

Preuve.

Théorème 4.5 (Linéarité de l'espérance)
Soit X et Y deux v.a.r.a.cs. sur le même $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, chacune admettant une espérance. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Alors, la v.a.r. $aX + bY$ admet une espérance et :

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

En particulier

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

Preuve.

Note. Même si X et Y sont absolument continues, rien ne garantie que la v.a.r. $aX + bY$ soit absolument continue.

4.3 Variance & Ecart-type

Définition 4.6 (Variance & Ecart-type)
Soit X une v.a.r.a.c. de f.d.p. f_X et admettant une espérance $E(X)$.

- *La variance de X est définit par :*

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f_X(x)dx$$

  sous réserve de convergence de l'intégrale.

- *L'écart-type de X est définit par :*

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

  sous réserve d'existence de $V(X)$.

Remarque.

• $V(X)$ est l'écart quadratique moyen de la variable aléatoire X par rapport à sa valeur moyenne.

• $V(X)$ est donc un indicateur mesurant la dispersion des valeurs x de X autour de leurs moyenne pondérée $E(X)$. Plus précisément, c'est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ qui mesure l'étendue de cette dispersion. Une petite variance signifie que X est fortement concentré et une grande variance signifie que X est dispersée.

Définition 4.7 (v.a.r. centrée (resp. centrée réduite))
Soit X une v.a.r.a.c.. On dit que :

- *X est centrée, si elle admet une espérance nulle, (i.e. $E(X) = 0$).*
- *X est centrée réduite, si elle admet une espérance nulle et une variance égale à 1, (i.e. $E(X) = 0$ et $V(X) = 1$).*

Théorème 4.8 *Soit X une v.a.r.a.c..*

- *Si X admet une espérance, alors $X - E(X)$ est centrée.*
- *Si X admet une variance non nulle, alors $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.*

Preuve.

4.4 Moments d'ordre supérieur

Définition 4.9 (Moments)
Soit X une v.a.r.a.c. de f.d.p. f_X. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Sous réserve de convergence absolue de l'intégrale :

- *Le moment d'ordre m de X est défini par*

$$E(X^m) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m f_X(x)dx$$

- *Le moment centré d'ordre m de X est défini par*

$$E((X - E(X))^m) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^m f_X(x)dx$$

Proposition 4.10 *Soit X une v.a.r.. Si X admet un moment d'ordre $m \in \mathbb{N}^*$ alors X admet des moments de tout ordre $j \in [\![1, m]\!]$.*

Preuve.

Théorème 4.11 (Formule de Köenig-Huyghens)
Soit X une v.a.r.. Si $E(X^2)$ existe, alors $V(X)$ existe et elle est donné par :

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

Preuve.

Proposition 4.12 *Soit X une v.a.r. admettant une variance. Alors :*

- $V(X) \geq 0$
- $V(aX + b) = a^2 V(X), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

Preuve.

Exemple. Soit X une v.a.r.a.c. telle que

$$E(X) = \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad E(X^2) = \frac{3}{5}$$

1) Calculer $V(X)$.

2) Soit Y une nouvelle v.a.r. définie par $Y = 3X - 2$. Calculer (a) $E(Y)$ et (b) $V(Y)$.

Solution.

4.5 Cas de deux v.a.r.a.cs indépendantes

Proposition 4.13 *Soit X et Y deux v.a.rs admettant chacune un moment d'ordre 2.*
Si X et Y sont indépendantes, alors :

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

and

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

Preuve.

5 Lois continues usuelles

- Toutes les v.a.rs absolument continues ci-après sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- v.a.r. absolument continue sera abrégée en v.a.r.a.c..

5.1 Loi continue uniforme

Définition 5.1 *Soit a et b deux réels, avec $a < b$. On dit qu'une v.a.r.a.c. X suit une loi continue uniforme sur $[a, b]$, si et seulement si, elle admet pour f.d.p.*

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} I_{[a,b]}(x)$$

On note alors

$$X \sim \mathcal{U}([a, b])$$

Modélisation. La distribution uniforme $\mathcal{U}([a, b])$ est utiliser pour modéliser une v.a.r. pouvant se produire équitablement entre a et b.

Interprétation. $X \sim \mathcal{U}([a, b])$ signifie : $\forall [u, v] \subset [a, b]$ et $\forall [u', v'] \subset [a, b]$

$$v - u = v' - u' \implies P(X \in [u, v]) = P(X \in [u', v'])$$

i.e. si $[u, v]$ et $[u', v']$ sont deux segments de même longueur, alors les événements $\{X \in [u, v]\}$ et $\{X \in [u', v']\}$ sont équiprobable.

Exemple. Un nombre représenté par X est choisie au hasard entre a et b. X est supposé être uniformément distribuée veut dire que la probabilité que X tombe dans un intervalle de longueur l ne dépend que de l, pas de la position de l'intervalle dans $[a, b]$.

Exercice. Soit $X \sim \mathcal{U}([a, b])$. Vérifier que f_X est une f.d.p..

Solution.

Proposition 5.2 *Si $X \sim \mathcal{U}([a, b])$, alors :*

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \textit{et} \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Preuve.

Proposition 5.3 *Si $X \sim \mathcal{U}([a, b])$, alors sa f.r. est donnée par :*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \textit{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \textit{si } a \le x \le b \\ 1 & \textit{si } b < x \end{cases}$$

Preuve.

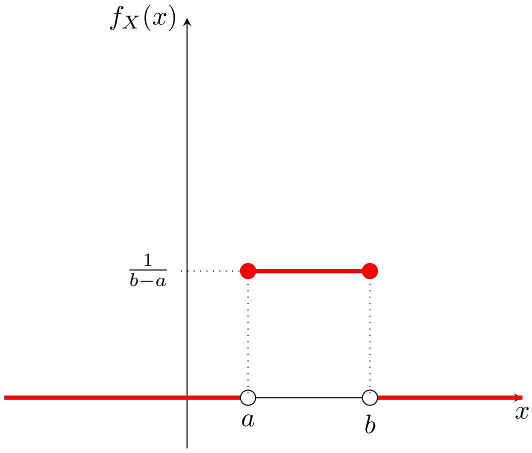

Figure 2: f.d.p. de $X \sim \mathcal{U}([a, b])$

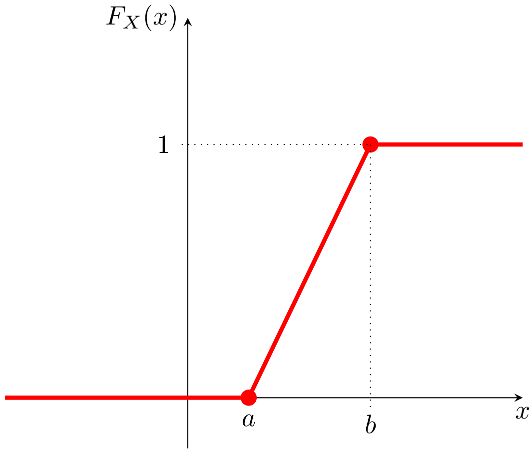

Figure 3: f.r. de $X \sim \mathcal{U}([a, b])$

Exercice. Soit $c \in \mathbb{R}^*$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} c & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Déterminer c pour que f soit une f.d.p.. Représenter graphiquement f.

2) Soit X une v.a.r.a.c. ayant f pour f.d.p..

   a) Reconnaitre la loi de X.

   b) Déterminer F_X, la f.r. de X.

   c) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Solution.

Proposition 5.4 *Soit X une v.a.r.a.c.. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Alors :*

$$X \sim \mathcal{U}([0, 1]) \iff a + (b - a)X \sim \mathcal{U}([a, b])$$

et

$$X \sim \mathcal{U}([a, b]) \iff \frac{X - a}{b - a}X \sim \mathcal{U}([0, 1])$$

Preuve.

5.2 Loi exponentielle

Définition 5.5 *Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On dit qu'une v.a.r.a.c. X suit une loi exponentielle de paramètre λ, si et seulement si, elle admet pour f.d.p.*

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{[0, +\infty[}(x)$$

On note alors

$$X \sim \mathcal{E}(\lambda)$$

Modélisation. (a faire).

Exercice. Soit $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$. Vérifier que f_X est une f.d.p..

Solution.

Proposition 5.6 *Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, alors :*

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \textit{and} \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Preuve.

Proposition 5.7 *Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, alors sa f.r. est donnée par*

$$F_X(x) = (1 - e^{-\lambda x}) I_{[0,+\infty[}(x)$$

i.e.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & si\ 0 \leq x \end{cases}$$

Preuve.

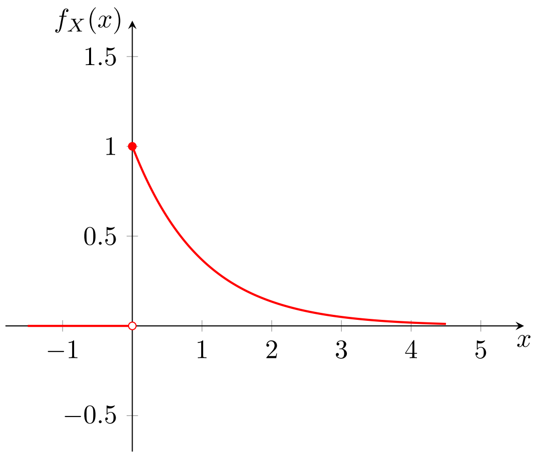

Figure 4: f.d.p. de $X \sim \mathcal{E}(1)$

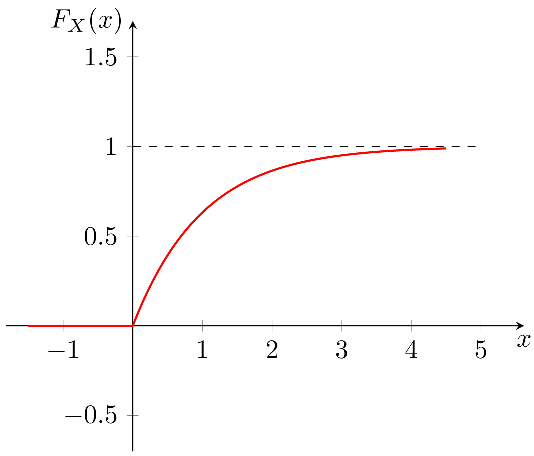

Figure 5: f.r. de $X \sim \mathcal{E}(1)$

Exercice. La durée de vie d'un atome d'un élément radioactif, représentée par X, est une v.a.r.a.c. ayant pour f.d.p. la fonction f_X définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 0.2e^{-0.2t} & \text{si } 0 \leq t \end{cases}$$

1) Déterminer la loi de X et donner sa f.r. F_X.
2) Représenter graphiquement f_X et F_X.
3) On mesure t en seconde.
    a) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
    b) Quelle est la probabilité pour qu'un atome ait une durée de vie supérieure à 4 secondes ?
    c) Quelle est la probabilité pour qu'un atome ait une durée de vie comprise entre 1 et 3 secondes ?

Solution.

Proposition 5.8 *Soit X une v.a.r.a.c.. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. alors :*

$$X \sim \mathcal{E}(1) \Longleftrightarrow \frac{1}{\lambda}X \sim \mathcal{E}(\lambda)$$

et

$$X \sim \mathcal{E}(\lambda) \Longleftrightarrow \lambda X \sim \mathcal{E}(1)$$

Preuve.

5.3 Loi normale ou loi de Gauss

La distribution normale joue un rôle central dans la théorie des probabilités et les statistiques. Une de ses premières applications était due à C.F. Gauss, qui l'utilisa en 1809 pour modéliser les erreurs d'observation en astronomie.

5.3.1 Loi Normale

Définition 5.9 *Soit $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$. On dit qu'une v.a.r.a.c. X suit une loi normale (ou loi de Gauss) de paramètres (μ, σ^2), si et seulement si, elle admet pour f.d.p.*

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

On note alors

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

Remarque. Il n'existe pas d'expression analytique simple d'une primitive de la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$. On admettra que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{2\pi}$$

Exercice. Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Vérifier que f_X est une f.d.p.. Représenter graphiquement f_X.

Solution.

Propriété 5.10 *Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors sa f.d.p. vérifie les propriétés suivantes :*

1) f_X *est symétrique par rapport au point* μ : $f_X(\mu - x) = f_X(\mu + x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

2) f_X *est maximale au point* μ : $f_X(x) \leq f_X(\mu), \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

3) $\lim_{x \to -\infty} f_X(x) = \lim_{x \to +\infty} f_X(x) = 0$.

Preuve.

Proposition 5.11 *Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, sa f.r. est donnée par*

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Preuve. C'est simplement la définition d'une f.r..

Remarque. Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
Puisque f_X est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, F_X est aussi de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et

$$F'_X(x) = f_X(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Proposition 5.12 *Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors*

$$E(X) = \mu \quad et \quad V(X) = \sigma^2$$

Preuve. Voir la sous-section sur la loi normale standard.

Proposition 5.13 (Transformation affine)
Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. Alors

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \implies Y = aX + b \sim \mathcal{N}(a\mu + b, (|a|\sigma)^2)$$

Preuve.

Corollaire 5.14 *Soit X une v.a.r.a.c.. soit $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$. Alors :*

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \iff X^* = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

et

$$X \sim \mathcal{N}(0, 1) \iff \sigma X + \mu \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

Preuve.

Remarque. L'intérêt de ce résultat est de ramener tous les calculs sur les lois normales à des calculs sur la loi normale standard (voir ci-après).

5.3.2 Loi normale Standard

Définition 5.15 *La loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ où $\mu = 0$ et $\sigma = 1$ est appelée loi normale standard, et est notée donc $\mathcal{N}(0, 1)$.*

- *La f.d.p. de la loi normale standard est souvent noté par la lettre grecque φ, i.e.*

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

- *La f.r. de la loi normale standard est souvent noté par la lettre grecque Φ, i.e.*

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Proposition 5.16 *Si $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, alors :*

$$E(X) = 0 \quad et \quad V(X) = 1$$

Preuve.

Corollaire 5.17 *Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors*

$$E(X) = \mu \quad et \quad V(X) = \sigma^2$$

Preuve.

Propriété 5.18 (f.d.p. de $\mathcal{N}(0,1)$)

1) φ *est paire:* $\varphi(-x) = \varphi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) φ *est maximale en* 0.

3) $\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$

Preuve.

Proposition 5.19 (f.r. de $\mathcal{N}(0,1)$)

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Preuve.

Exercice. Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Montrer que $-X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Solution.

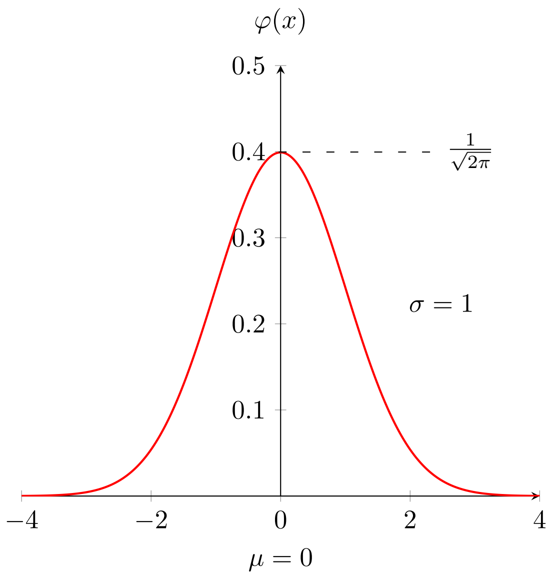

Figure 6: f.d.p. de $X \sim \mathcal{N}(0,1)$

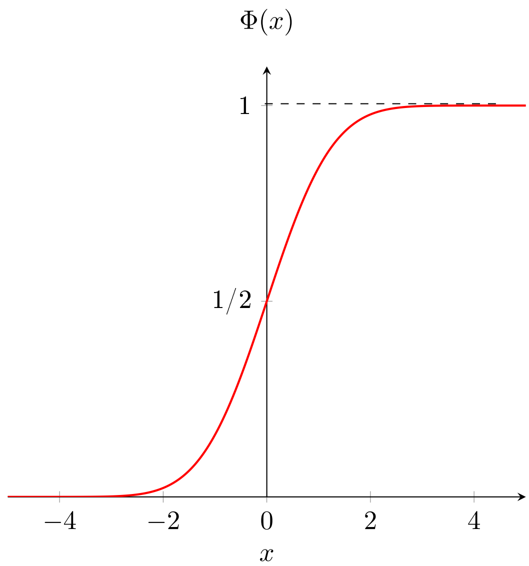

Figure 7: f.r. de $X \sim \mathcal{N}(0,1)$

5.3.3 Règle de 68-95-99%

Propriété 5.20 *Si* $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ *alors*

- $P(\{\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma\}) \simeq 0.68$
- $P(\{\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma\}) \simeq 0.95$
- $P(\{\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma\}) \simeq 0.99$

Preuve.

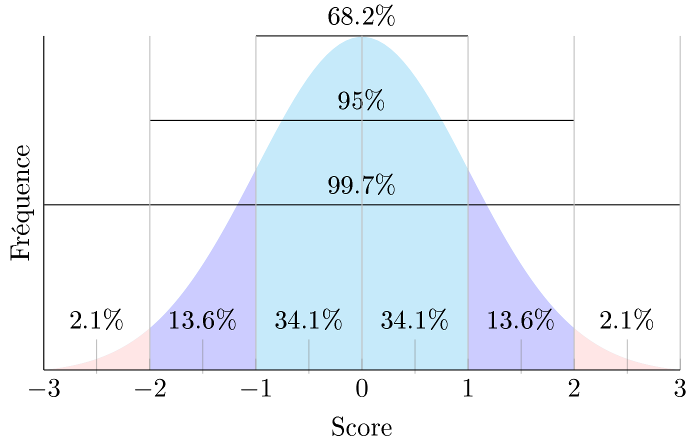

Figure 8: Règle de 68-95-99% pour $X \sim \mathcal{N}(0,1)$

5.3.4 Table de la loi normale standard

La f.r. Φ de la loi normale standard $\mathcal{N}(0,1)$ est

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \quad \forall x \mathbb{R}$$

Comme il n'existe pas d'expression analytique simple pour la fonction de distribution Φ autre que sa formulation intégrale, les valeurs de la fonction Φ pour x entre 0 et 4, par incréments de 0.01, sont rassemblées dans une table appelée *table de la loi normale standard* (*cf* fin de ce document).

Valeurs pour la loi normale standard :

• **Cas** $0 \leq x \leq 4$.
La valeur de $\Phi(x)$ est lu sur la table à l'intersection de la ligne et de la colonne dont la somme vaut x.
Par exemple, $\Phi(1.37) = 0.914657$

• **Cas** $-4 \leq x \leq 0$.
On utilise la relation $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.
Par exemple, $\Phi(-1.37) = 1 - \Phi(1.37) = 0,085343$

• **Approximation de** $\Phi(x)$. Dans certains calculs très précis, on a besoin des valeurs de $\Phi(x)$ pour $x > 4$. La formule suivante donne une très bonne approximation :

$$\Phi(x) \simeq 1 - \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Par exemple, $\Phi(5) = 1 - 7.45 \times 10^{-7} = 0.999999255$.

Valeurs pour une loi normale non-standard :

Par transformation affine, on peut toujours se ramener à loi loi normale standard.

Proposition 5.21 *Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors sa f.r. F_X satisfait la relation*

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Preuve.

Remarque. Cette relation permet de ramener tous les calculs sur les loi normales aux calculs sur la loi normale standard.

Exemple. Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) = \mathcal{N}(6, 2^2)$. Calculer $F_X(3)$.

Solution. On a

$$\begin{aligned} F_X(3) &= \Phi\left(\frac{3-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{3-6}{2}\right) = \Phi(-1.5) = 1 - \Phi(1.5) \simeq 1 - 0.933193 \\ &\simeq 0,066807 \end{aligned}$$

Fonction de répartition de $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$: $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.00	0.500000	0.503989	0.507978	0.511966	0.515953	0.519939	0.523922	0.527903	0.531881	0.535856
0.10	0.539828	0.543795	0.547758	0.551717	0.555670	0.559618	0.563559	0.567495	0.571424	0.575345
0.20	0.579260	0.583166	0.587064	0.590954	0.594835	0.598706	0.602568	0.606420	0.610261	0.614092
0.30	0.617911	0.621720	0.625516	0.629300	0.633072	0.636831	0.640576	0.644309	0.648027	0.651732
0.40	0.655422	0.659097	0.662757	0.666402	0.670031	0.673645	0.677242	0.680822	0.684386	0.687933
0.50	0.691462	0.694974	0.698468	0.701944	0.705401	0.708840	0.712260	0.715661	0.719043	0.722405
0.60	0.725747	0.729069	0.732371	0.735653	0.738914	0.742154	0.745373	0.748571	0.751748	0.754903
0.70	0.758036	0.761148	0.764238	0.767305	0.770350	0.773373	0.776373	0.779350	0.782305	0.785236
0.80	0.788145	0.791030	0.793892	0.796731	0.799546	0.802337	0.805105	0.807850	0.810570	0.813267
0.90	0.815940	0.818589	0.821214	0.823814	0.826391	0.828944	0.831472	0.833977	0.836457	0.838913
1.00	0.841345	0.843752	0.846136	0.848495	0.850830	0.853141	0.855428	0.857690	0.859929	0.862143
1.10	0.864334	0.866500	0.868643	0.870762	0.872857	0.874928	0.876976	0.879000	0.881000	0.882977
1.20	0.884930	0.886861	0.888768	0.890651	0.892512	0.894350	0.896165	0.897958	0.899727	0.901475
1.30	0.903200	0.904902	0.906582	0.908241	0.909877	0.911492	0.913085	0.914657	0.916207	0.917736
1.40	0.919243	0.920730	0.922196	0.923641	0.925066	0.926471	0.927855	0.929219	0.930563	0.931888
1.50	0.933193	0.934478	0.935745	0.936992	0.938220	0.939429	0.940620	0.941792	0.942947	0.944083
1.60	0.945201	0.946301	0.947384	0.948449	0.949497	0.950529	0.951543	0.952540	0.953521	0.954486
1.70	0.955435	0.956367	0.957284	0.958185	0.959070	0.959941	0.960796	0.961636	0.962462	0.963273
1.80	0.964070	0.964852	0.965620	0.966375	0.967116	0.967843	0.968557	0.969258	0.969946	0.970621
1.90	0.971283	0.971933	0.972571	0.973197	0.973810	0.974412	0.975002	0.975581	0.976148	0.976705
2.00	0.977250	0.977784	0.978308	0.978822	0.979325	0.979818	0.980301	0.980774	0.981237	0.981691
2.10	0.982136	0.982571	0.982997	0.983414	0.983823	0.984222	0.984614	0.984997	0.985371	0.985738
2.20	0.986097	0.986447	0.986791	0.987126	0.987455	0.987776	0.988089	0.988396	0.988696	0.988989
2.30	0.989276	0.989556	0.989830	0.990097	0.990358	0.990613	0.990863	0.991106	0.991344	0.991576
2.40	0.991802	0.992024	0.992240	0.992451	0.992656	0.992857	0.993053	0.993244	0.993431	0.993613
2.50	0.993790	0.993963	0.994132	0.994297	0.994457	0.994614	0.994766	0.994915	0.995060	0.995201
2.60	0.995339	0.995473	0.995604	0.995731	0.995855	0.995975	0.996093	0.996207	0.996319	0.996427
2.70	0.996533	0.996636	0.996736	0.996833	0.996928	0.997020	0.997110	0.997197	0.997282	0.997365
2.80	0.997445	0.997523	0.997599	0.997673	0.997744	0.997814	0.997882	0.997948	0.998012	0.998074
2.90	0.998134	0.998193	0.998250	0.998305	0.998359	0.998411	0.998462	0.998511	0.998559	0.998605
3.00	0.998650	0.998694	0.998736	0.998777	0.998817	0.998856	0.998893	0.998930	0.998965	0.998999
3.10	0.999032	0.999065	0.999096	0.999126	0.999155	0.999184	0.999211	0.999238	0.999264	0.999289
3.20	0.999313	0.999336	0.999359	0.999381	0.999402	0.999423	0.999443	0.999462	0.999481	0.999499
3.30	0.999517	0.999534	0.999550	0.999566	0.999581	0.999596	0.999610	0.999624	0.999638	0.999651
3.40	0.999663	0.999675	0.999687	0.999698	0.999709	0.999720	0.999730	0.999740	0.999749	0.999758
3.50	0.999767	0.999776	0.999784	0.999792	0.999800	0.999807	0.999815	0.999822	0.999828	0.999835
3.60	0.999841	0.999847	0.999853	0.999858	0.999864	0.999869	0.999874	0.999879	0.999883	0.999888
3.70	0.999892	0.999896	0.999900	0.999904	0.999908	0.999912	0.999915	0.999918	0.999922	0.999925
3.80	0.999928	0.999931	0.999933	0.999936	0.999938	0.999941	0.999943	0.999946	0.999948	0.999950
3.90	0.999952	0.999954	0.999956	0.999958	0.999959	0.999961	0.999963	0.999964	0.999966	0.999967
4.00	0.999968	0.999970	0.999971	0.999972	0.999973	0.999974	0.999975	0.999976	0.999977	0.999978

Quantile z_α défini par $P(Z > z_\alpha) = \alpha$ avec $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$

α	0.25	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
z_α	0.674490	1.281552	1.644854	1.959964	2.326348	2.575829	3.090232	3.290527
z_α/2	1.150349	1.644854	1.959964	2.241403	2.575829	2.807034	3.290527	3.480756