Proposit° 1.9

② ① $P(\{X \le a\}) = F_X(a)$

On $P(\Omega) = 1 \Rightarrow P(\{X \le a\}) + P(\{X > a\}) = 1$

$\Omega = \{X>a\} \cup \{X \le a\} \Leftrightarrow P(\{X > a\}) = 1 - F_X(a)$

union disjointe

② $\mathbb{R} =]-\infty;a] \cup]a;+\infty[\Rightarrow P_X(\mathbb{R}) = P_X(]-\infty;a]) + P_X(]a;+\infty[)$

$\Leftrightarrow 1 = F_X(a) + P_X(]a;+\infty[)$

$\Leftrightarrow P(X > a) = 1 - F_X(a)$

union disjointe

③ $\mathbb{R} =]-\infty;a] \cup]a;b]$

$]-\infty;b] = P_X(]-\infty;a]) + P_X(]a;b])$

$\Leftrightarrow F_X(b) = F_X(a) + P_X(]a;b])$

$\Leftrightarrow P_X(]a;b]) = F_X(b) - F_X(a)$
$= P_X(a < X \le b)$

Proposit° 2.3

$\left.\begin{array}{l} \cdot\ B \text{ dénombrable} \\ \cdot\ A \subset B \end{array}\right\} \Rightarrow A$ dénombrable ?

Proposit° 2.4

① $P(\{X < a\}) = P(\{X \le a\}) = F_X(a)$

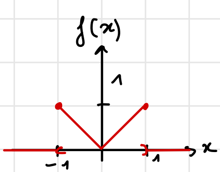
évènement disjoints

$P(\{X \le a\}) = P(\{X < a\} \cup \{X = a\}) \Leftrightarrow F_X(a) = P(\{X<a\}) + \underbrace{P(\{X=a\})}_{=0 \text{ car } X \text{ continue}}$

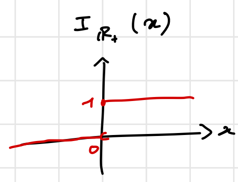
$\Leftrightarrow F_X(a) = P(\{X < a\})$

Exemple 3.1

$f(x) = |x| I_{[-1,1]}(x)$
$= \begin{cases} |x| & \text{si } x \in I \\ 0 & \text{si } x \notin I \end{cases}$



$I_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A \end{cases}$



$f(x)$ f° de densité de proba ?

① • si $x \notin [-1;1]$, $f(x) = 0 \geq 0$
  • si $x \in [-1;1]$, $f(x) = |x| \geq 0$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \text{si } x \notin [-1;1],\ f(x)=0 \geq 0 \\ \bullet\ \text{si } x \in [-1;1],\ f(x)=|x| \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0$$

② f est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ sauf la partie finie $\{-1;1\}$.

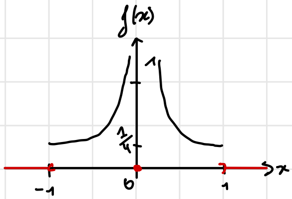
③ $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} |x|\,dx = 2\int_{0}^{1} x\,dx = 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 1$$

car $|x|$ paire

Ainsi $f(x)$ est une f° de densité de proba.

Exemple

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\sqrt{|x|}} & \text{si } 0 < |x| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{4\sqrt{|x|}} \text{ sur } [-1;1] \setminus \{0\}$$



$$\left.\begin{array}{l} ①\ \bullet\ \text{si } |x| \notin]0;1] \text{ alors } f(x)=0 \geq 0 \\ \quad \bullet\ \text{si } |x| \in]0;1] \text{ alors } f(x) = \dfrac{1}{4\sqrt{|x|}} \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}\ f(x) \geq 0$$

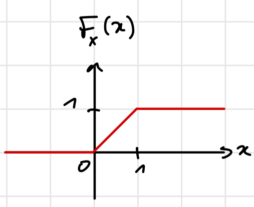
② f est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ sauf sur la partie finie $\{-1, 0, 1\}$

③ $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\int_0^1 \frac{1}{4} x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{2} \times 2 \times \left[x^{\frac{1}{2}}\right]_0^1 = 1$$

$$= 2\int_0^1 \frac{1}{4\sqrt{x}}\,dx = 2 \times \frac{1}{2} \times \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \left[\sqrt{x}\right]_0^1 = 1$$

Exemple (3.7)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$



- $F_X(x)$ est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$
- $F_X(x)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf sur la partie finie $\{0;1\}$

$\Rightarrow$ ① d'après th 3.7, X est une variable aléatoire réelle absolument continue (v.a r.a.c)

② une fdp (f° de densité de proba) de X est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} F_X'(x) & \text{si } F_X \text{ dérivable en } x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0;1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Lois continues usuelles : uniforme, exponentielle et normale (loi de Gauss)

<u>Exemple (p13)</u>

$X \sim U([a,b])$: $f_X(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{I}_{[a,b]}(x) \Leftrightarrow f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a;b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

- Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{si } x \in [a;b],\ f_X(x) > 0 \\ \text{si } x \notin [a;b],\ f_X(x) = 0 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f_X(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- f est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ sauf sur la partie finie $\{a, b\}$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)dx + \int_a^b f_X(x)dx + \int_b^{+\infty} f_X(x)dx$

$$= \int_a^b f_X(x)dx$$

$$= \int_a^b \frac{1}{b-a}dx$$

$$= \frac{1}{b-a}[x]_a^b = \frac{1}{b-a}(b-a)$$

$$= 1$$

$\Rightarrow f_X$ est bien une f° de densité de probabilité

<u>Proposit° 5.2</u>

- $\displaystyle E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{a} x f_X(x)dx + \int_a^b x f_X(x)dx + \int_b^{+\infty} x f_X(x)dx$

$$= \int_a^b \frac{x}{b-a}\, dx$$

$$= \frac{1}{2(b-a)} \left[x^2\right]_a^b$$

$$= \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} \quad \Big| \quad \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)}$$

$$= \frac{a+b}{2}$$

- $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$$E(X^2) = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\, dx = \frac{1}{3(b-a)} (b^3 - a^3)$$

$$= \frac{(b-a)(a^2+ab+b^2)}{3(b-a)} = \boxed{\frac{a^2+ab+b^2}{3}}$$

$$\Rightarrow V(X) = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{4a^2+4ab+4b^2-3a^2-6ab-3b^2}{12} = \frac{a^2-2ab+b^2}{12}$$

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Propositⁿ 5.3

Si $X \sim U([a,b])$ alors $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } b < x \end{cases}$

Preuve

$X \sim U([a,b])$ est noté $f_X(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{I}_{[a,b]}(x)$ d'après def 5.1

$$\int_{-\infty}^x \frac{1}{b-a}\, dx = \int_a^x \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a} \left[x\right]_a^x = \frac{x-a}{b-a}$$

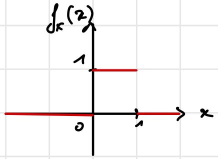
Pour $x < a$: $\int_{-\infty}^x 0\, dt = 0$

Pour $a \leq x \leq b$: fais + haut

Pour $x > b$: $F_X(x) = 1 \Leftrightarrow \int_a^b \frac{x-a}{b-a} dx = 1$

Exercice

$$f(x) = \begin{cases} c & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



① $f_X(x) = \frac{1}{b-a}$ si $a \leq x \leq b$

ici $a = 0$ et $b = 1$ $\Rightarrow$ $f_X(x) = 1$ pour $0 \leq x \leq 1$

$$\Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

② a) Il s'agit de la loi : $X \sim U([0,1])$

b) $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

c) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} x f_X(x) dx + \int_0^1 x f_X(x) dx + \int_1^{+\infty} x f_X(x) dx$

$= 0 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + 0$

$= \frac{1}{2} = \frac{a+b}{2}$

$E(X^2) = \int_0^1 x^2 f_X(x) d x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$

Définition 5.2

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{[0;+\infty[}(x)$$

suit la loi : $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

Exercice

$$X \sim \mathcal{E}(\lambda) \Leftrightarrow f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{[0;+\infty[}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \in [0;+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

① Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{si } x \in [0;+\infty[,\ f_X(x) \geq 0 \\ \text{si } x \notin [0;+\infty[,\ f_X(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f_X(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

② f est C^0 sur $\mathbb{R}$ sauf sur la partie finie $\{0\}$

③ $$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_{+\infty}^{0} f_X(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} f_X(x)\,dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{b \to +\infty}$$

$$= 1$$

Ainsi les 3 condit° sont réunies et $f_X(x)$ est bien une $f°$ de densité de proba.

Proposit° 5.6

$$E(X) = \int_0^{+\infty} \underset{u}{x}\, \underset{v'}{\lambda e^{-\lambda x}}\,dx \qquad \begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v = -e^{-\lambda x} & v' = \lambda e^{-\lambda x} \end{array}$$

$$= \left[x(-e^{-\lambda x})\right]_0^{b \to +\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-\lambda x}\,dx$$

car $E(X) = \frac{1}{\lambda} \underbrace{\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx}_{=1 \text{ car intégrale densité}}$

$$= \frac{1}{\lambda}$$

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x}\,dx \qquad \begin{array}{ll} u = x^2 & u' = 2x \\ v = -e^{-\lambda x} & v' = \lambda e^{-\lambda x} \end{array}$$

$$= \left[x^2(-e^{-\lambda x})\right]_0^{b \to +\infty} - 2\int_0^{+\infty} x(-e^{-\lambda x})\,dx$$

$$= \frac{2}{\lambda}\int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x}\,dx \quad = \frac{2}{\lambda} E(X)$$

$$= \frac{2}{\lambda^2}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Proposit° 5.7

$$F_X(x) = (1 - e^{-\lambda x})\, I_{[0;+\infty[}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Pour $x<0$: $\int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{x} (1-e^{-\lambda x})\,dx = 0$

Pour $x \geq 0$: $\int_{-\infty}^{0} f_X(x)\,dx + \int_{0}^{x} f_X(x)\,dx = \int_{0}^{x} (1-e^{-\lambda t})\,dt = 1-e^{-\lambda x}$

Exercice

$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ 0{,}2\,e^{-0{,}2t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

① $X \sim \mathcal{E}(0{,}2)$ $\qquad F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ 1-e^{-0{,}2t} & \text{si } t\geq 0 \end{cases}$

② figure 4

③ a) $E(X) = \frac{1}{0{,}2} = 5$ $\qquad V(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{0{,}04} = 50$

b) $P(\{X \geq 4\}) = 1 - F_X(4) = 1-(1-e^{-0{,}2\times 4}) = e^{-0{,}8} \simeq 0{,}44$

Ainsi, $\simeq 44\%$ des atomes ont une durée de vie supérieure à 4 secondes.

c) $P(\{1 \leq X \leq 3\}) = P(\{X=3\}) - P(\{X=1\}) \simeq 0{,}27$

Exercice 5.9

$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

- Pour $x \in \mathbb{R}$, $f_X(x) \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

- f est C^0 sur $\mathbb{R}$ sauf sur la partie finie $\{\emptyset\}$. $\text{card}(\{\emptyset\}) = 0$

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$

On pose $t = \frac{x-\mu}{\sigma} \Leftrightarrow x = \sigma t + \mu$

$\Leftrightarrow dx = \sigma\,dt$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} \sigma\,dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} = 1$$

$\Rightarrow f_X(x)$ est une f° densité de proba

Rappel

$Y = aX + b$ (ex 2 TD1)

cas $a > 0$: $Y \in \mathbb{R}$, $F_Y(y) = P(\{Y \leq y\}) = P(\{aX+b \leq y\})$

$= P(\{X \leq \frac{y-b}{a}\})$

$= F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$

Propositiⁿ 5.13

$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Y = aX + b \sim N(a\mu + b, (|a|\sigma)^2)$ Th 3.7

F_Y est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ car composée de 2 f° $\mathcal{C}^\infty$

$\Rightarrow$ ① Y est une v.a.r.a.c.

② une f.d.p. de Y est $f_Y(y) = F'_Y(y) = \frac{1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$

$$= \frac{1}{a} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{y-b}{a} - \mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\underbrace{a\sigma}_{\sigma'}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y - \overbrace{(\mu a + b)}^{\mu'}}{a\sigma}\right)^2}$$

$\Rightarrow Y = aX + b \sim N(a\mu + b, (a\sigma)^2)$

Cas $a < 0$ à faire ⚠

Propositiⁿ 5.16

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, \varphi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} x\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x}_{u}\, \underbrace{e^{-\frac{1}{2}x^2}}_{v'}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-\frac{1}{2}x^2}\right]_{a \to -\infty}^{b \to +\infty}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\lim_{a \to -\infty} e^{-\frac{1}{2}a^2} - \lim_{b \to +\infty} e^{-\frac{1}{2}b^2}\right]$$

$= \frac{1}{2\pi}[0-0]$

$= 0$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \varphi(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x}_{u}\, \underbrace{x e^{-\frac{1}{2}x^2}}_{v'}\,dx$$

$u = x \quad u' = 1$

$v = \quad v' = x e^{-\frac{1}{2}x^2}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-x e^{-\frac{1}{2}x^2}\right]_{a \to -\infty}^{b \to +\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \sqrt{2\pi}$$

$$= 1$$

Corollaire 5.17

Rappel

$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow X^* = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

$X^* = \frac{X-\mu}{\sigma} \Leftrightarrow X = \sigma X^* + \mu$

$$\Rightarrow E(Y) = E(\sigma X^* + \mu)$$

$$= \sigma \underbrace{E(X^*)}_{=0} + \mu$$

$$= \mu$$

$$V(X) = V(\sigma X^* + \mu) = \sigma^2 V(X^*)$$

$$= \sigma^2$$

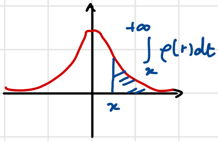
Proposition 5.19

$\forall x \in \mathbb{R}, \phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt$ avec $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$

Rq $\phi(-x) = 1 - \phi(x)$

$$\phi(-x) = \int_{-\infty}^{-x} \varphi(t)\,dt \qquad \text{posons } u = -t$$

$$\phi(-x) = \int_{+\infty}^{x} \varphi(-u)\,(-du) = \int_{x}^{+\infty} \varphi(-u)\,du = 1 - \phi(x)$$



D'où $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\phi(-x) = 1 - \phi(x)}$

Exercice

D'après la propositº 5.13 : $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow X \sim N(0,1) \Rightarrow Y = aX + b = -X$

$\Rightarrow Y \sim N(a\mu + b, (|a|\sigma)^2)$

$\Rightarrow Y \sim N(0,1)$

D'après 5.18 : $Y = -X$

$$\forall y \in \mathbb{R},\ F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(-X \leq -y)$$
$$= P(X \geq -y)$$
$$= 1 - P(X \leq -y)$$
$$= 1 - \phi(-y)$$
$$= \phi(y)$$

Règle 68-95-99% : propriété 5.20

Soit $k \in \mathbb{N}^*$: $P(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma) = P\left(-k \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq k\right)$

$$= P(-k \leq X^* \leq k)$$
$$= \phi(k) - \phi(-k)$$
$$= \phi(k) - (1 - \phi(k))$$
$$= 2\phi(k) - 1$$

Pour $k = 1$: $2 \times 0{,}84 - 1 = 1{,}68 - 1 = 0{,}6826$

Pour $k = 2$: $2 \times 0{,}9772 - 1 = 1{,}9544 - 1 = 0{,}95$

Pour $k = 3$: $2 \times 0{,}9986 - 1 = 1{,}9972 - 1 = 0{,}99$

Exemple 5.21

$X \sim N(\mu, \sigma^2) = N(6, 2^2)$.

$F_X(3) = \phi\left(\frac{3-\mu}{\sigma}\right) = \phi\left(\frac{3-6}{2}\right) = \phi\left(-\frac{3}{2}\right) = \phi(-1,5) = 1 - \phi(1,5) = 1 - 0,933193 = 0,066807$