
PROBABILITÉS & SIMULATION

Rattrapage - mars 2025

◁ Consignes ▷

Durée : 120 mn

- Autorisé : Trois feuilles A4 recto-verso manuscrites. Calculatrices.
- Non autorisé : Tout autre document et tous les supports électroniques (smart-phone, tablette, ordinateur,...).

- L'épreuve est composée de 4 exercices indépendants.
- La table de la loi normale standard y est jointe.

◁ Sujet de l'épreuve ▷

► On notera :

- v.a.r. pour variable aléatoire réelle.
- v.a.r.d. pour variable aléatoire réelle discrète.
- v.a.r.a.c. pour variable aléatoire réelle absolument continue.
- f.m.p. pour fonction de masse de probabilité.
- f.d.p. pour fonction de densité de probabilité.
- f.r. pour fonction de répartition.

Exercice 1. (*xx pts*)

La quantité de pain (en centaines de kilos) qu'un boulanger vend en une journée est une v.a.r.a.c. X de f.d.p. f donnée par

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ a(6 - x) & \text{si } 3 \leq x < 6 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Où a est un réel.

- 1) a) Montrer que $a = \frac{1}{9}$.
b) Tracer l'allure de la courbe représentative de f .
- 2) a) Déterminer F , la fonction de répartition de X .
b) Tracer l'allure de la courbe représentative de F .
- 3) En faisant usage de F , calculer la probabilité des événements suivants :
 - a) $A = \text{"le boulanger vend en une journée, plus de 300 kilos de pain"}$.
 - b) $B = \text{"le boulanger vend en une journée, entre 100 et 300 kilos de pain"}$.
- 4) Déterminer la médiane de X , c'est-à-dire le réel m telle que $P(X > m) = 1/2$.
- 5) Calculer $E[X]$, l'espérance de X .

Exercice 2. (*xx pts*)

Pour toute v.a.r.a.c. suivant une loi normale standard, on notera φ sa f.d.p. et Φ sa f.r..

Soit X une v.a.r. qui suit une loi normale standard, i.e. $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$; prouver que :

$$a) P(X > x) = P(X < -x) \quad ; \quad b) P(|X| > x) = 2P(X > x) \quad ; \quad c) P(|X| \leq x) = 2P(X < x) - 1$$

Exercice 3. (*xx pts*)

Pour toute v.a.r.a.c. suivant une loi normale standard, on notera φ sa f.d.p. et Φ sa f.r..

Soit Z une v.a.r. distribuée selon une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, avec $\mu = 1$ et $\sigma = 2$.

1) Calculer les probabilités suivantes :

$$a) P(Z < 0) \quad ; \quad b) P(Z > \frac{1}{2}) \quad ; \quad c) P(|Z - 1| \leq 4)$$

2) Résoudre les équations en x suivantes :

$$a) P(Z > x) = 0.5 \quad ; \quad b) P(-2x < Z - 1 < 2x) = 0.98 \quad ; \quad c) P(Z \leq x) = 0.2$$

Exercice 4. (*xx pts*)

Soit X une v.a.r.a.c. suivant une loi uniforme sur $[a, b]$, avec $a < b$. On note μ son espérance et σ son écart-type.

1) a) Donner la valeur de μ et la valeur de σ , en fonction de a et b .

b) Démontrer que $\mu - \sigma \geq a$ et que $\mu + \sigma \leq b$.

c) Calculer $P(X \in [\mu - \sigma, \mu + \sigma])$.

2) On suppose maintenant que $0 < a < b$. Soit $Y = X^2$, une nouvelle v.a.r..

a) Donner F_X , la fonction de répartition de X .

b) Déterminer F_Y la fonction de répartition de Y

c) Justifier que Y est une v.a.r.a.c.. Montrer que la fonction f_Y ci-après est une f.d.p de Y .

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq a^2 \\ \frac{1}{2(b-a)\sqrt{y}} & \text{si } a^2 < y < b^2 \\ 0 & \text{si } b^2 \leq y \end{cases}$$

d) Calculer $E[Y]$, l'espérance de Y .

Fonction de répartition de $Z \sim N(0, 1)$: $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.00	0.500000	0.503989	0.507978	0.511966	0.515953	0.519939	0.523922	0.527903	0.531881	0.535856
0.10	0.539828	0.543795	0.547758	0.551717	0.555670	0.559618	0.563559	0.567495	0.571424	0.575345
0.20	0.579260	0.583166	0.587064	0.590954	0.594835	0.598706	0.602568	0.606420	0.610261	0.614092
0.30	0.617911	0.621720	0.625516	0.629300	0.633072	0.636831	0.640576	0.644309	0.648027	0.651732
0.40	0.655422	0.659097	0.662757	0.666402	0.670031	0.673645	0.677242	0.680822	0.684386	0.687933
0.50	0.691462	0.694974	0.698468	0.701944	0.705401	0.708840	0.712260	0.715661	0.719043	0.722405
0.60	0.725747	0.729069	0.732371	0.735653	0.738914	0.742154	0.745373	0.748571	0.751748	0.754903
0.70	0.758036	0.761148	0.764238	0.767305	0.770350	0.773373	0.776373	0.779350	0.782305	0.785236
0.80	0.788145	0.791030	0.793892	0.796731	0.799546	0.802337	0.805105	0.807850	0.810570	0.813267
0.90	0.815940	0.818589	0.821214	0.823814	0.826391	0.828944	0.831472	0.833977	0.836457	0.838913
1.00	0.841345	0.843752	0.846136	0.848495	0.850830	0.853141	0.855428	0.857690	0.859929	0.862143
1.10	0.864334	0.866500	0.868643	0.870762	0.872857	0.874928	0.876976	0.879000	0.881000	0.882977
1.20	0.884930	0.886861	0.888768	0.890651	0.892512	0.894350	0.896165	0.897958	0.899727	0.901475
1.30	0.903200	0.904902	0.906582	0.908241	0.909877	0.911492	0.913085	0.914657	0.916207	0.917736
1.40	0.919243	0.920730	0.922196	0.923641	0.925066	0.926471	0.927855	0.929219	0.930563	0.931888
1.50	0.933193	0.934478	0.935745	0.936992	0.938220	0.939429	0.940620	0.941792	0.942947	0.944083
1.60	0.945201	0.946301	0.947384	0.948449	0.949497	0.950529	0.951543	0.952540	0.953521	0.954486
1.70	0.955435	0.956367	0.957284	0.958185	0.959070	0.959941	0.960796	0.961636	0.962462	0.963273
1.80	0.964070	0.964852	0.965620	0.966375	0.967116	0.967843	0.968557	0.969258	0.969946	0.970621
1.90	0.971283	0.971933	0.972571	0.973197	0.973810	0.974412	0.975002	0.975581	0.976148	0.976705
2.00	0.977250	0.977784	0.978308	0.978822	0.979325	0.979818	0.980301	0.980774	0.981237	0.981691
2.10	0.982136	0.982571	0.982997	0.983414	0.983823	0.984222	0.984614	0.984997	0.985371	0.985738
2.20	0.986097	0.986447	0.986791	0.987126	0.987455	0.987776	0.988089	0.988396	0.988696	0.988989
2.30	0.989276	0.989556	0.989830	0.990097	0.990358	0.990613	0.990863	0.991106	0.991344	0.991576
2.40	0.991802	0.992024	0.992240	0.992451	0.992656	0.992857	0.993053	0.993244	0.993431	0.993613
2.50	0.993790	0.993963	0.994132	0.994297	0.994457	0.994614	0.994766	0.994915	0.995060	0.995201
2.60	0.995339	0.995473	0.995604	0.995731	0.995855	0.995975	0.996093	0.996207	0.996319	0.996427
2.70	0.996533	0.996636	0.996736	0.996833	0.996928	0.997020	0.997110	0.997197	0.997282	0.997365
2.80	0.997445	0.997523	0.997599	0.997673	0.997744	0.997814	0.997882	0.997948	0.998012	0.998074
2.90	0.998134	0.998193	0.998250	0.998305	0.998359	0.998411	0.998462	0.998511	0.998559	0.998605
3.00	0.998650	0.998694	0.998736	0.998777	0.998817	0.998856	0.998893	0.998930	0.998965	0.998999
3.10	0.999032	0.999065	0.999096	0.999126	0.999155	0.999184	0.999211	0.999238	0.999264	0.999289
3.20	0.999313	0.999336	0.999359	0.999381	0.999402	0.999423	0.999443	0.999462	0.999481	0.999499
3.30	0.999517	0.999534	0.999550	0.999566	0.999581	0.999596	0.999610	0.999624	0.999638	0.999651
3.40	0.999663	0.999675	0.999687	0.999698	0.999709	0.999720	0.999730	0.999740	0.999749	0.999758
3.50	0.999767	0.999776	0.999784	0.999792	0.999800	0.999807	0.999815	0.999822	0.999828	0.999835
3.60	0.999841	0.999847	0.999853	0.999858	0.999864	0.999869	0.999874	0.999879	0.999883	0.999888
3.70	0.999892	0.999896	0.999900	0.999904	0.999908	0.999912	0.999915	0.999918	0.999922	0.999925
3.80	0.999928	0.999931	0.999933	0.999936	0.999938	0.999941	0.999943	0.999946	0.999948	0.999950
3.90	0.999952	0.999954	0.999956	0.999958	0.999959	0.999961	0.999963	0.999964	0.999966	0.999967
4.00	0.999968	0.999970	0.999971	0.999972	0.999973	0.999974	0.999975	0.999976	0.999977	0.999978

Quantile z_α défini par $P(Z > z_\alpha) = \alpha$ avec $Z \sim N(0, 1)$

α	0.25	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
z_α	0.674490	1.281552	1.644854	1.959964	2.326348	2.575829	3.090232	3.290527
$z_{\alpha/2}$	1.150349	1.644854	1.959964	2.241403	2.575829	2.807034	3.290527	3.480756