2021/2022
Département Mathématiques
Ing1-GIA

Probabilités & Simulation

Examen - janvier 2022

◁ Consignes ▷

<u>Durée : 120 mn</u>

▶ Autorisé : Trois feuilles A4 recto-verso manuscrites. Calculatrices.
▶ Non autorisé : Tout autre document et tous les supports électroniques (smart-phone, tablette, ordinateur,...).

- L'épreuve est composée de 4 exercices indépendants.
- La table de la loi normale standard y est jointe.
- Une réponse numérique donnée sous forme algébrique simplifiée est acceptée (sous forme d'une fraction réduite par exemple).

◁ Sujet de l'épreuve ▷

• On notera : v.a.r.a.c. pour variable aléatoire réelle absolument continue.

Exercice 1. *(xx pts)*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ke^{-\frac{x}{2}}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(x)$$

1) Montrer que f est une fonction de densité de probabilité, si et seulement si, $k = \dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}$.

   Soit X une v.a.r.a.c. admettant f pour fonction de densité de probabilité.

2) Déterminer F, la fonction de répartition de X.

3) Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$ de X.

4) En faisant usage de la fonction de répartition, calculer les probabilités suivantes :

   a) $P(X \leq 3)$ *b)* $P(X > 5)$

   d) $P(\{X \leq 3\} \cup \{X > 5\})$ *e)* $P(\{5 < X \leq 7\} \mid \{X > 3\})$

   Rappel : $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Exercice 2. *(xx points)*

On considère une v.a.r.a.c. X de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $E(X^{n+2}) = (n+1)E(X^n)$ [intégrer par parties].

2) Que vaut $E(X^2)$? Déduire de ce résultat et de la question précédente la valeur de $E(X^4)$.

3) Que vaut $E(X^3)$?

4) Soit Y la v.a.r. définie par $Y = 2X + 1$.

   a) Quelle est la loi de Y ?

   b) Déterminer $E(Y^4)$. [on pourra utiliser la formule du binôme : $\forall a, b \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$

   $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

   et les moments de X trouvés précédemment].

5) A l'aide de la table de la loi normale standard, déterminer $P(|X| \geq 2)$. Que donne l'inégalité de Tchebychev (ci-après) dans ce cas ?

   $$\forall x > 0, \qquad P(|X - E(X)| > x) \leq \frac{V(X)}{x^2}$$

   Comparer et commenter.

6) On suppose maintenant que X suit une loi normale de moyenne 7 et d'écart-type 4.

   a) Déterminer $P(X \leq 8)$ et $P(5 \leq X \leq 9)$.

   b) Déterminer a tel que $P(X > a) = 0.9$.

7) [Bonus, (question non obligatoire))] La taille des élèves d'un Lycée est distribuée selon une loi normale de moyenne m et d'écart-type σ. On sait qu'un cinquième des élèves mesurent moins de $1m50$ et que 10% des élèves mesurent plus de $1m80$. Déterminer m et σ.

Exercice 3. (*xx points*)

On considère un dé à six faces non pipé qu'on lance 100 fois. On s'intéresse à la somme des points obtenus.

1) Modéliser à l'aide de variables aléatoires cette situation.

2) En faisant usage du CLT, calculer la probabilité que cette somme soit comprise entre 300 pts et 400 pts.

Exercice 4. (*xx points*)

On rappelle que : $p_X(x) = P(X = x)$, lorsque X est une v.a.r. discrète.

Soit $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.rs discrètes telle que pour tout $n \geq 1$

$$Y_n(\Omega) = \{0, n\}$$

et f.m.p.

$$p_{Y_n}(y) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{n} & \text{si } y = 0 \\ \dfrac{1}{n} & \text{si } y = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) a) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} E(Y_n)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} V(Y_n)$.

   b) Que peut-on en conclure ?

2) La suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge-elle en moyenne quadratique vers $Y = 0$?

3) Montrer que $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $Y = 0$.

4) On considère une suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de v.a.r.-i.i.d. de même loi que Y_2. Pour k assez grand, par quelle loi peut-on approcher le loi de la v.a.r. Z ? :

$$Z = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} X_i$$

Fonction de répartition de $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$: $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

z	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.00	0.500000	0.503989	0.507978	0.511966	0.515953	0.519939	0.523922	0.527903	0.531881	0.535856
0.10	0.539828	0.543795	0.547758	0.551717	0.555670	0.559618	0.563559	0.567495	0.571424	0.575345
0.20	0.579260	0.583166	0.587064	0.590954	0.594835	0.598706	0.602568	0.606420	0.610261	0.614092
0.30	0.617911	0.621720	0.625516	0.629300	0.633072	0.636831	0.640576	0.644309	0.648027	0.651732
0.40	0.655422	0.659097	0.662757	0.666402	0.670031	0.673645	0.677242	0.680822	0.684386	0.687933
0.50	0.691462	0.694974	0.698468	0.701944	0.705401	0.708840	0.712260	0.715661	0.719043	0.722405
0.60	0.725747	0.729069	0.732371	0.735653	0.738914	0.742154	0.745373	0.748571	0.751748	0.754903
0.70	0.758036	0.761148	0.764238	0.767305	0.770350	0.773373	0.776373	0.779350	0.782305	0.785236
0.80	0.788145	0.791030	0.793892	0.796731	0.799546	0.802337	0.805105	0.807850	0.810570	0.813267
0.90	0.815940	0.818589	0.821214	0.823814	0.826391	0.828944	0.831472	0.833977	0.836457	0.838913
1.00	0.841345	0.843752	0.846136	0.848495	0.850830	0.853141	0.855428	0.857690	0.859929	0.862143
1.10	0.864334	0.866500	0.868643	0.870762	0.872857	0.874928	0.876976	0.879000	0.881000	0.882977
1.20	0.884930	0.886861	0.888768	0.890651	0.892512	0.894350	0.896165	0.897958	0.899727	0.901475
1.30	0.903200	0.904902	0.906582	0.908241	0.909877	0.911492	0.913085	0.914657	0.916207	0.917736
1.40	0.919243	0.920730	0.922196	0.923641	0.925066	0.926471	0.927855	0.929219	0.930563	0.931888
1.50	0.933193	0.934478	0.935745	0.936992	0.938220	0.939429	0.940620	0.941792	0.942947	0.944083
1.60	0.945201	0.946301	0.947384	0.948449	0.949497	0.950529	0.951543	0.952540	0.953521	0.954486
1.70	0.955435	0.956367	0.957284	0.958185	0.959070	0.959941	0.960796	0.961636	0.962462	0.963273
1.80	0.964070	0.964852	0.965620	0.966375	0.967116	0.967843	0.968557	0.969258	0.969946	0.970621
1.90	0.971283	0.971933	0.972571	0.973197	0.973810	0.974412	0.975002	0.975581	0.976148	0.976705
2.00	0.977250	0.977784	0.978308	0.978822	0.979325	0.979818	0.980301	0.980774	0.981237	0.981691
2.10	0.982136	0.982571	0.982997	0.983414	0.983823	0.984222	0.984614	0.984997	0.985371	0.985738
2.20	0.986097	0.986447	0.986791	0.987126	0.987455	0.987776	0.988089	0.988396	0.988696	0.988989
2.30	0.989276	0.989556	0.989830	0.990097	0.990358	0.990613	0.990863	0.991106	0.991344	0.991576
2.40	0.991802	0.992024	0.992240	0.992451	0.992656	0.992857	0.993053	0.993244	0.993431	0.993613
2.50	0.993790	0.993963	0.994132	0.994297	0.994457	0.994614	0.994766	0.994915	0.995060	0.995201
2.60	0.995339	0.995473	0.995604	0.995731	0.995855	0.995975	0.996093	0.996207	0.996319	0.996427
2.70	0.996533	0.996636	0.996736	0.996833	0.996928	0.997020	0.997110	0.997197	0.997282	0.997365
2.80	0.997445	0.997523	0.997599	0.997673	0.997744	0.997814	0.997882	0.997948	0.998012	0.998074
2.90	0.998134	0.998193	0.998250	0.998305	0.998359	0.998411	0.998462	0.998511	0.998559	0.998605
3.00	0.998650	0.998694	0.998736	0.998777	0.998817	0.998856	0.998893	0.998930	0.998965	0.998999
3.10	0.999032	0.999065	0.999096	0.999126	0.999155	0.999184	0.999211	0.999238	0.999264	0.999289
3.20	0.999313	0.999336	0.999359	0.999381	0.999402	0.999423	0.999443	0.999462	0.999481	0.999499
3.30	0.999517	0.999534	0.999550	0.999566	0.999581	0.999596	0.999610	0.999624	0.999638	0.999651
3.40	0.999663	0.999675	0.999687	0.999698	0.999709	0.999720	0.999730	0.999740	0.999749	0.999758
3.50	0.999767	0.999776	0.999784	0.999792	0.999800	0.999807	0.999815	0.999822	0.999828	0.999835
3.60	0.999841	0.999847	0.999853	0.999858	0.999864	0.999869	0.999874	0.999879	0.999883	0.999888
3.70	0.999892	0.999896	0.999900	0.999904	0.999908	0.999912	0.999915	0.999918	0.999922	0.999925
3.80	0.999928	0.999931	0.999933	0.999936	0.999938	0.999941	0.999943	0.999946	0.999948	0.999950
3.90	0.999952	0.999954	0.999956	0.999958	0.999959	0.999961	0.999963	0.999964	0.999966	0.999967
4.00	0.999968	0.999970	0.999971	0.999972	0.999973	0.999974	0.999975	0.999976	0.999977	0.999978

Quantile z_α défini par $P(Z > z_\alpha) = \alpha$ avec $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$

α	**0.25**	**0.1**	**0.05**	**0.025**	**0.01**	**0.005**	**0.001**	**0.0005**
z_α	0.674490	1.281552	1.644854	1.959964	2.326348	2.575829	3.090232	3.290527
z_α/2	1.150349	1.644854	1.959964	2.241403	2.575829	2.807034	3.290527	3.480756