CY-Tech - Département Mathématiques

$1^{\text{ère}}$ année Ingénieurs - Génie Mathématique

Mesure & intégration

TD5 – Produit de mesures

Théorème de Fubini-Tonelli – Rappel 1.

Soient μ_1 et μ_2 deux mesures σ-finies. Si $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to [0, +\infty]$ est $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$-mesurable, alors les fonctions φ et ψ définies respectivement sur Ω_1 et Ω_2 par

$$\varphi : x_1 \mapsto \int_{\Omega_2} f(x_1, x_2)\, d\mu_2(x_2) \quad \text{et} \quad \psi : x_2 \mapsto \int_{\Omega_1} f(x_1, x_2)\, d\mu_1(x_1)$$

sont mesurables. et

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f\, d\mu &= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x_1, x_2)\, d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) \\ &= \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x_1, x_2)\, d\mu_1(x_1) \right) d\mu_2(x_2).\end{aligned}$$

EXERCICE 1 Soit $\mathfrak{R} = [1,2] \times [0,2]$ et $f : \mathfrak{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = y \exp(xy)$.

1. Justifier que le calcul de $I = \int_{\mathfrak{R}} f(x,y)\, dx dy$ est possible.
2. Montrer que $I = \frac{1}{2} e^4 - e^2 + \frac{1}{2}$.

EXERCICE 2 Sur $\mathbb{R}^2$ muni de la tribu borélienne et de la mesure μ produit des mesures de Lebesgue, on considère la fonction définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ par $f(x, y) = \dfrac{1}{(1+y)(1+x^2 y)}$.

1. Peut-on appliquer le théorème de Fubini-Tonelli pour évaluer $I = \int_{\mathbb{R}_+^2} f(x,y) dx dy$? justifier.
2. Montrer que $\int_{\mathbb{R}_+} f(x,y) dx = \dfrac{\pi}{2} \dfrac{1}{\sqrt{y}(1+y)}$.
3. Montrer que $I = \dfrac{\pi^2}{2}$.
4. Montrer que $\int_{\mathbb{R}_+} f(x,y) dy = \dfrac{2\ln(x)}{x^2 - 1}$ et en déduire $\int_0^{+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2-1} dx$.

Théorème de Fubini – Rappel 2.

Soient μ_1 et μ_2 deux mesures σ-finies. Si $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ est μ-intégrable, alors

1. Pour presque tout $x_1 \in \Omega_1$, la fonction $x_2 \mapsto f(x_1, x_2)$ est intégrable sur Ω_2 et la fonction φ définie presque partout sur Ω_1 par

$$\varphi : x_1 \mapsto \int_{\Omega_2} f(x_1, x_2)\, d\mu_2(x_2)$$

est μ_1-intégrable sur Ω_1.

2. Pour presque tout $x_2 \in \Omega_2$, la fonction $x_1 \mapsto f(x_1, x_2)$ est intégrable sur Ω_1 et la fonction ψ définie presque partout sur Ω_2 par

$$\psi : x_2 \mapsto \int_{\Omega_1} f(x_1, x_2)\, d\mu_1(x_1)$$

est μ_2-intégrable sur Ω_2.

3.
$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f\, d\mu &= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x_1, x_2)\, d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) \\ &= \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x_1, x_2)\, d\mu_1(x_1) \right) d\mu_2(x_2). \end{aligned}$$

EXERCICE 3 On considère sur $\big([0,1], \mathscr{B}([0,1])\big)$ la mesure de Lebesgue λ et la mesure de dénombrement μ_d. Soit D un sous-ensemble de $[0,1]^2$ défini par

$$D = \left\{(x, x); x \in [0,1]^2\right\}.$$

1. Vérifier que la fonction $\mathbf{1}_D$ est borélienne.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 \mathbf{1}_D(x, y) dx \right) d\mu_d(y)$ et $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 \mathbf{1}_D(x, y) d\mu_d(y) \right) dx$.

   Ce résultat est-il compatible avec le théorème de Fubini ?

EXERCICE 4 Calculer les intégrales

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} dx \right) dy, \\ J &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} dy \right) dx, \\ K &= \int_{]0,1[^2} \frac{|x^2 - y^2|}{\left(x^2 + y^2\right)^2} dx dy. \end{aligned}$$

Expliquer ces résultats.

EXERCICE 5 On considère la fonction f définie sur $]-1,1[^2$ par

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Vérifier que f est borélienne.
2. Calculer $I = \displaystyle\int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 f(x, y) dx \right) dy$ et $J = \displaystyle\int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 f(x, y) dy \right) dx$.

3. f est-elle intégrable sur $]-1,1[^2$?

EXERCICE 6 Sur $\mathbb{R}^2$ muni de la tribu borélienne et de la mesure $\lambda \otimes \lambda$ produit des mesures de Lebesgue. On considère la fonction définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = e^{-y} \sin\left(2xy\right).$$

Soit $U = [0;1] \times [0, +\infty[$.

1. Montrer que f est intégrable pour la mesure produit de Lebesgue sur U.
2. Peut-on appliquer le théorème de Fubini pour évaluer $I = \int_U f(x, y)dxdy$? Justifier.
3. Montrer que $\int_U f(x, y)d\lambda \otimes \lambda = \frac{\ln(5)}{4}$.
4. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{y} \sin^2(y)e^{-y}dy$.