CY-Tech - Département Mathématiques

$1^{\text{ère}}$ année Ingénieurs - Génie Mathématique

Mesure & intégration

TD4 – Intégration de fonctions mesurables

Fonction réelle intégrable – Rappel 1.

Une fonction f de Ω dans $\mathbb{R}$ est dite μ-intégrable si f est $(\mathcal{T}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$-mesurable et

$$\int f^+ d\mu < +\infty \text{ et } \int f^- d\mu < +\infty.$$

EXERCICE 1 Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ et $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+), \lambda)$ deux espaces mesurés où μ est une mesure **finie** sur Ω et λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^+$. On considère l'application mesurable

$$f : (\Omega, \mathcal{T}, \mu) \to (\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+), \lambda).$$

On suppose que $\displaystyle\int_\Omega f^2 d\mu < +\infty$.
Soient $A_1 = \{x \in \Omega,\ 0 \le f(x) \le 1\}$ et $A_2 = \{x \in \Omega,\ f(x) > 1\}$.

1. Montrer que A_1 et A_2 sont deux ensembles mesurables, $A_1 \in \mathcal{T}$ et $A_2 \in \mathcal{T}$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_{A_1} f d\mu < +\infty$.
3. Montrer que $\displaystyle\int_{A_2} f d\mu < +\infty$.
4. Que peut-on déduire sur l'intégrabilité de f sur Ω? Justifier.

Théorème de la convergence dominée – Rappel 2.

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{L}(\Omega, \mathcal{T})$ et $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$. On suppose que

- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f μ-p.p
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \le g$.

Alors

$$\begin{cases} f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int f_n d\mu = \int f d\mu \end{cases}$$

EXERCICE 2 Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définie, pour tout entier n, par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{n+2}}\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x).$$

1. Déterminer la limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Pour tout entier n, on considère l'intégrale $I_n = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx$. Calculer la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

EXERCICE 3 Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right)\frac{n}{x\left(1+x^2\right)}\mathbf{1}_{\mathbb{R}^*}(x).$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est mesurable.
2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n$.
3. Calculer, en justifiant, $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)d\lambda(x)$.

EXERCICE 4 (Mesure définie par une densité) Soient $(\Omega, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré et f une fonction positive et $(\Omega, \mathscr{T})$-mesurable. On considère la fonction d'ensembles ν définie par

$$\forall A \in \mathscr{T},\ \ \nu(A) = \int_A f d\mu = \int_\Omega \mathbf{1}_A f d\mu.$$

1. Montrer que ν définit une mesure sur $(\Omega, \mathscr{T})$. La fonction f s'appelle la densité de ν par rapport à μ.
2. Soit $g : (\Omega, \mathscr{T}) \to \left(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R})\right)$ une fonction mesurable et positive.
   (a) Montrer que $\int_\Omega g d\nu = \int_\Omega f g d\mu$.
   (b) En déduire que g est ν-intégrable si et seulement si gf est μ-intégrable.
3. Soit $g : (\Omega, \mathscr{T}) \to \left(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R})\right)$ une fonction mesurable de signe quelconque.
   (a) g est ν-intégrable si et seulement si gf est μ-intégrable.
   (b) Montrer que $\int_\Omega g d\nu = \int_\Omega f g d\mu$.

EXERCICE 5 Montrer que toute mesure sur $\mathbb{R}$ de densité f vérifiant $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ est une mesure de probabilité.

EXERCICE 6 Soient $(\Omega, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré, $\left(\Omega', \mathscr{A}\right)$ un espace mesurable, et $\mathbf{T} : (\Omega, \mathscr{T}) \to \left(\Omega', \mathscr{A}\right)$ une application mesurable. On considère la fonction d'ensembles $\mu_{\mathbf{T}}$ définie par :

$$\forall B \in \mathscr{A},\ \ \mu_{\mathbf{T}}(B) = \mu\left(\mathbf{T}^{-1}(B)\right) = \mu \circ \mathbf{T}^{-1}(B).$$

1. Montrer que $\mu_{\mathbf{T}}$ définit une mesure sur $\left(\Omega', \mathscr{A}\right)$. $\mu_{\mathbf{T}}$ s'appelle mesure image de μ par $\mathbf{T}$.

2. Soit $g : \left(\Omega', \mathscr{A}\right) \to \left(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R})\right)$ une fonction mesurable. Montrer que g est $\mu_{\mathbf{T}}-$intégrable si et seulement si l'application mesurable $g \circ \mathbf{T}$ est $\mu-$intégrable et que

$$\int_{\Omega'} g \, d\mu_{\mathbf{T}} = \int_{\Omega} g \circ \mathbf{T} \, d\mu.$$

Espace $\mathscr{L}^p$ – Rappel 4.

Soit $p \in [1, +\infty[$. On dit que f est est de puissance $p^{\text{ième}}$-intégrable, et on note $f \in \mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{T}, \mu)$, si f est mesurable et $|f|^p$ est μ-intégrable.

$$f \in \mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{T}, \mu) \Longleftrightarrow f \in \mathscr{L}(\Omega, \mathscr{T}) \ \text{ et } \int_{\Omega} |f|^p \, d\mu < +\infty.$$

Si $f \in \mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{T}, \mu)$, $N_p(f) = \left(\int_{\Omega} |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$.

EXERCICE 7 Soit f une fonction réelle strictement positive. On suppose que $f \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{T}, \mu)$ et $\dfrac{1}{f} \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{T}, \mu)$. Montrer que Ω est fini.

EXERCICE 8 Soit $(\Omega, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré. On considère trois réels non nuls et positifs p, q et r tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}.$$

On suppose que $f \in \mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{T}, \mu)$ et que $g \in \mathscr{L}^q(\Omega, \mathscr{T}, \mu)$.

1. Montrer que $N_r(fg) \le N_p(f) N_q(g)$.

2. Montrer que la fonction fg est $r-$intégrable.

Fonction essentiellement bornée – Rappel 5.

Une fonction f de $\mathscr{L}(\Omega, \mathscr{T})$ est dite essentiellement bornée s'il existe $r \ge 0$ tel que $|f| \le r$ μ-p.p.
On note $\mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathscr{T}, \mu)$ l'ensemble des fonctions essentiellement bornées de $\mathscr{L}(\Omega, \mathscr{T})$.

$$\mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathscr{T}, \mu) = \left\{f \in \mathscr{L}(\Omega, \mathscr{T}), \ \exists r \ge 0 \ \text{ tel que } |f| \le r \ \ \mu-\text{p.p.}\right\}$$

et $\mathbf{N}_\infty(f) = \inf\left\{r \ge 0 \ / \ |f| \le r \ \ \mu\text{-p.p}\right\}$.

EXERCICE 9

1. Soit $f \in \mathscr{L}^1$ et $g \in \mathscr{L}^\infty$. Montrer que fg est μ-intégrable et que

$$\mathbf{N}_1(f \times g) \le \mathbf{N}_1(f) \times \mathbf{N}_\infty(g).$$

2. Supposons que $\mu(\Omega) < +\infty$ et $1 \le p_1 \le p_2 \le +\infty$. Montrer que $\mathscr{L}^\infty \subset \mathscr{L}^{p_2} \subset \mathscr{L}^{p_1} \subset \mathscr{L}^1$.