# CY-Tech - Département Mathématiques

## $1^{\text{ère}}$ année Ingénieurs - Génie Mathématique

Mesure & intégration

TD3 – Intégration de fonctions mesurables positives

**Intégrale d'une fonction étagée positive – Rappel 1.**

Soit $\varphi \in \mathscr{E}_+(\Omega, \mathscr{T})$ et $\sum_{i=1}^{m} a_i \mathbb{1}_{A_i}$ sa représentation canonique. On appelle intégrale de $\varphi$ sur $\Omega$ par rapport à la mesure $\mu$ et on note $\int_\Omega \varphi d\mu$ ou $\int_\Omega \varphi(x) d\mu(x)$, la somme $\sum_{i=1}^{m} a_i \mu(A_i)$ :

$$\int_\Omega \varphi d\mu = \sum_{i=1}^{m} a_i \mu(A_i)$$

**EXERCICE 1** Vérifier que la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{\mathbb{R}}$ est $\delta_0$-intégrable sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas $\lambda$-intégrable sur $\mathbb{R}$.

**EXERCICE 2** Soient $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathscr{T} = \mathscr{P}(\mathbb{N})$ et $\mu_c$ la mesure de comptage définie sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$.

1. Soit $A \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$. Montrer que $\mu_c(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_A(n)$.
2. Soit $\varphi$ une fonction étagée positive sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$. Montrer que $\int_{\mathbb{N}} \varphi d\mu_c = \sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi(n)$.

**EXERCICE 3 (Additivité domaniale)** Soit $\varphi$ une fonction étagée positive sur un espace mesuré $(\Omega, \mathscr{T}, \mu)$. Pour $F$ et $G$ deux ensembles mesurables disjoints, montrer que

$$\int_{F \cup G} \varphi d\mu = \int_F \varphi d\mu + \int_G \varphi d\mu.$$

**EXERCICE 4** Soit $f$ une fonction réelle définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathbf{1}_{[1;2]}(x) + 5\mathbf{1}_{[3;5]}(x).$$

On note $\lambda$ la mesure de Lebesgue, $\delta_{\frac{3}{2}}$ la mesure de Dirac concentrée en $\frac{3}{2}$ et $\mu_d$ la mesure de comptage. Calculer en justifiant vos calculs les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}} f d\lambda, \;\; I_2 = \int_{\mathbb{R}} f d\delta_{\frac{3}{2}}, \;\; I_3 = \int_{\mathbb{R}} f d\mu_d$$

**Théorème de convergence monotone ou de Beppo-Levi – Rappel 2.**

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions de $\overline{\mathfrak{L}}_+(\Omega,\mathscr{T})$ qui tend $\mu$-p.p vers une fonction $f$, alors

1. $f \in \overline{\mathfrak{L}}_+(\Omega,\mathscr{T})$,
2. La suite $\left(\int f_n \, d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en croissant vers $\int f \, d\mu$.

**EXERCICE 5** Soit l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ où $\lambda$ est la mesure de Lebesgue et soit

$$f_n(x) = \left(1 - e^{-n\cos x}\right) \mathbf{1}_{[0,\pi/2]}.$$

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int f_n d\lambda$.

**EXERCICE 6** Soient $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathscr{T} = \mathscr{P}(\mathbb{N})$ et $\mu$ la mesure de comptage définie sur $(\Omega,\mathscr{T})$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n = \mathbf{1}_{\{n\}}$. Déterminer $\int_{\mathbb{N}} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n d\mu$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{N}} f_n d\mu$. Commenter vos résultats.

**EXERCICE 7** Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables positives sur $(\Omega,\mathscr{T},\mu)$. On définit la fonction $F$ pour tout $x \in \Omega$ par

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

Montrer que la fonction $F$ est mesurable positive et que

$$\int_\Omega F d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_\Omega f_n d\mu\right).$$

**EXERCICE 8** Soit $(\Omega,\mathscr{T},\lambda)$ un espace mesuré où $\lambda$ est la mesure de Lebesgue. Soit $(f_n)_n$ une suite décroissante de fonctions mesurables et positives sur $\Omega$. On suppose que $\int_\Omega f_0 d\lambda < +\infty$. Montrer que

1. la suite $(f_n)_n$ converge, on note $f$ la limite de $(f_n)_n$;
2. $f$ est $\lambda$-intégrable;
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n d\lambda = \int_\Omega f$.