CY-Tech - Département Mathématiques

$1^{\text{ère}}$ année Ingénieurs - Génie Mathématique

Mesure & intégration

TD 2 – Introduction à la mesure

Mesure – Rappel 1.

Soient $\mathscr{T}$ une tribu de parties de Ω et $\mathbf{m} : \mathscr{T} \longrightarrow [0,+\infty]$ une fonction d'ensembles positive. $\mathbf{m}$ est une mesure positive sur $\mathscr{T}$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées:

1. $\mathbf{m}(\emptyset) = 0$;
2. $\mathbf{m}$ est σ-additive.

EXERCICE 1 Soient Ω un ensemble, $\mathscr{T}$ une tribu de parties de Ω et $\mathbf{m}$ une mesure positive sur $\mathscr{T}$. Montrer les propriétés suivantes:

1. $(A,B) \in \mathscr{T}^2$ tels que $A \subset B$ alors $\mathbf{m}(A) \leq \mathbf{m}(B)$.
2. $A_n \in \mathscr{T}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\mathbf{m}\Big(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \leq \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{m}(A_n)$.

EXERCICE 2 Soit $(\Omega, \mathscr{T})$ un espace mesurable. Soient $x_1, \ldots, x_k$ des éléments distincts de Ω et $a_1, \ldots, a_k$ des réels strictement positifs. On note

$$\begin{array}{cccccc} \mu & : & \mathscr{T} & \to & [0;\infty] \\ & & B & \mapsto & \sum\limits_{i=1}^{k} a_i \delta_{x_i}(B) \end{array}$$

où δ_{x_i} est la mesure de Dirac concentrée en x_i. Montrer que μ est une mesure positive sur $(\Omega, \mathscr{T})$.

EXERCICE 3 Soit $A = \bigcup\limits_{n\geq 0} \left[n, n + \frac{1}{2^n} \right[$. Calculer $\lambda(A)$.

EXERCICE 4

1. Soit $x_0, x_1, x_2, \ldots$ des réels. Calculer $\lambda\left(\bigcup\limits_{n\geq 0} \{x_n\}\right)$.
2. En déduire $\lambda(\mathbb{Q})$.

EXERCICE 5 Montrer que tout ensemble fini ou dénombrable A est borélien, de mesure de Lebesgue nulle $\lambda(A) = 0$.

ensemble négligeable – Rappel 2.

1. On dit qu'un ensemble $\mathbf{N} \in \mathscr{T}$ est $\mathbf{m}$-négligeable si $\mathbf{m}(\mathbf{N}) = 0$.
2. On dit qu'une partie $\mathbf{N}$ de Ω est $\mathbf{m}$-négligeable s'il existe $A \in \mathscr{T}$ tel que $\mathbf{N} \subset A$ et $\mathbf{m}(A) = 0$.

EXERCICE 6 Soit $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{m})$ un espace mesuré et soit $\mathscr{N}$ l'ensemble des parties $\mathbf{m}$-négligeables. On considère

$$\widetilde{\mathscr{T}} = \{A \cup \mathbf{N};\ \ A \in \mathscr{T} \text{ et } \mathbf{N} \in \mathscr{N}\}.$$

Pour tout $A \in \mathscr{T}$ et pour tout $\mathbf{N} \in \mathscr{N}$, on pose $\widetilde{\mathbf{m}}(A \cup \mathbf{N}) = \mathbf{m}(A)$. Montrer que

1. $\widetilde{\mathscr{T}}$ est une tribu sur Ω contenant $\mathscr{T}$.
2. $\widetilde{\mathbf{m}}$ définit une mesure positive sur $\widetilde{\mathscr{T}}$ qui coïncide avec $\mathbf{m}$ sur $\mathscr{T}$.