CY-Tech - Département Mathématiques

$1^{\text{ère}}$ année Ingénieurs - Génie Mathématique

Mesure & intégration

TD1 – Tribus et application mesurables

Tribu – Rappel 1.

Soit $\mathscr{T} \subset P(\Omega)$, on dit que $\mathscr{T}$ est une tribu de parties (ou σ-algèbre) si elle vérifie :

1. $\Omega \in \mathscr{T}$,
2. la stabilité par passage au complémentaire : $\mathrm{A} \in \mathscr{T} \Longrightarrow \Omega \backslash \mathrm{A} \in \mathscr{T}$,
3. la stabilité par réunion dénombrable : Si $\mathrm{A}_n \in \mathscr{T}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n \in \mathscr{T}$.

EXERCICE 1 Soit $\mathscr{T}$ une tribu de parties de Ω. Montrer que :

a) $\emptyset \in \mathscr{T}$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathscr{T}$ alors $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{T}$.

EXERCICE 2 Soient $\mathscr{T}$ une tribu de parties de Ω et $\mathrm{U} \subset \Omega$. Montrer que

$$\mathscr{T}_{\mathrm{U}} = \left\{\mathrm{A} \cap \mathrm{U},\ \mathrm{A} \in \mathscr{T}\right\}$$

est une tribu sur U. Cette tribu est appelée la tribu trace sur U.

EXERCICE 3 Montrer les propriétés suivantes.

1. L'intersection de tribus sur Ω est une tribu sur Ω.
2. **Tribu image réciproque :** Soit f une application de E dans F. L'image réciproque d'une tribu $\mathscr{F}$ sur F est une tribu sur E :
$$f^{-1}(\mathscr{F}) \overset{\text{Définition}}{=} \left\{f^{-1}(\mathrm{B})\ ;\ \mathrm{B} \in \mathscr{F}\right\}.$$

EXERCICE 4 Soient A et B deux sous-ensembles de Ω.

1. Décrire la tribu engendrée par A. Justifier votre réponse.
2. Décrire la tribu engendrée par A et B. Justifier votre réponse.

Application mesurable – Rappel 2.

Soient $(\Omega_1, \mathscr{T}_1)$ et $(\Omega_1, \mathscr{T}_1)$ deux espaces mesurables. Soit $f : \Omega_1 \to \Omega_1$. On dit que f est $(\mathscr{T}_1, \mathscr{T}_2)$-mesurable si l'image réciproque de tout élément de $\mathscr{T}_2$ par f appartient à $\mathscr{T}_1$:

$$\forall \mathrm{B} \in \mathscr{T}_2,\ \ f^{-1}(\mathrm{B}) \in \mathscr{T}_1.$$

EXERCICE 5 Soient $(\Omega_1;\mathcal{T}_1)$, $(\Omega_2;\mathcal{T}_2)$ et $(\Omega_3;\mathcal{T}_3)$ trois espaces mesurables. Soient $g : \Omega_2 \to \Omega_3$ une application continue, $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ une application mesurable, $h = g \circ f$. Montrer que h est une application mesurable.

EXERCICE 6 Soit $(X,\mathcal{T})$ un espace mesurable. On note $\mathbb{1}_A$ la fonction indicatrice sur A. Montrer que $\mathbb{1}_A$ est mesurable si et seulement si A est mesurable.

EXERCICE 7 Soient $(X,\mathcal{T})$ un espace mesurable et $f : (X,\mathcal{T}) \to (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une application mesurable. Soit $k > 0$. On définit f_k par :

$$f_k(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad \left|f(x)\right| \leq k \\ k & \text{si} \quad f(x) > k \\ -k & \text{si} \quad f(x) < -k \end{cases}$$

Montrer que f_k est mesurable.

EXERCICE 8

1. Soient $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ des fonctions mesurables. Montrer que $\inf_n f_n$, $\sup_n f_n$, $\liminf_n f_n$ et $\limsup_n f_n$ sont mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}$.

2. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Montrer que $|f|$ est une fonction mesurable.