Département de Mathématiques

Cycle ingénieur $1^{\text{ère}}$ année

Semestre 1 – Mathématiques appliquées

# Mesure et intégration

## Notes de cours

Nisrine FORTIN CAMDAVANT

# Table des matières

# Introduction générale au module

La théorie de la mesure permet d'associer une grandeur numérique à un ensemble. Plusieurs types de "mesures" ont déjà été rencontrés : le cardinal d'un ensemble discret, la longueur d'une courbe, l'aire d'une figure plane, le volume d'un solide en dimension 3, la probabilité d'un évènement....

Ces mesures sont courantes et forment des cas particuliers d'une notion plus générale de mesures (**Chapitre 2**), outil de base pour une nouvelle théorie de l'intégration, dite intégrale de Lebesgue **(Chapitre 3)**.

L'intégrale au sens de Lebesgue généralise la notion de l'intégrale de Riemann. Cette nouvelle théorie s'applique à une classe de fonctions beaucoup plus grande (*les fonctions mesurables*), cette dernière étend la notion de continuité de fonctions **(Chapitre 1)**.

Une mesure est associée à *une famille d'ensembles* à mesurer, appelée *tribu de parties* **(Chapitre 1)**. Ainsi, une *tribu* va englober des *ensembles mesurables* par une *mesure* donnée.

## 0.1 Approche intuitive

Intuitivement, si on se place dans un ensemble non vide $\Omega$, une tribu définie sur $\Omega$ contiendra des sous-ensembles de $\Omega$. Ces ensembles qu'on mesure seront "rassemblés" de la façon suivante :

- La mesure choisie doit nous permettre de mesurer $\Omega$ donc

  $$\boxed{\Omega \text{ doit appartenir à la tribu;}}$$

- Si A appartient à la tribu, on peut donc la mesurer et on souhaite que le complémentaire de A dans $\Omega$ soit aussi *mesurable* donc on impose dans la définition

  $$\boxed{\text{la condition de stabilité par passage au complémentaire;}}$$

- Si on sait mesurer deux parties A et B (appartiennent donc à la tribu), on souhaite que leur union soit aussi *mesurable* donc on impose dans la définition

  $$\boxed{\text{la condition de stabilité par union dénombrable.}}$$

On définira les fonctions qui préservent la propriété de mesurabilité de l'image réciproque d'un ensemble mesurable. Cette théorie s'appliquera à des théorèmes de convergence beaucoup plus puissants : théorème de convergence monotone, théorème de convergence dominée **(Chapitre 5)**.

## 0.2 Exemple d'application : les probabilités

Le calcul des probabilités s'intéresse à mesurer la "chance" qu'un certain "événement", résultat d'une expérience, a de se produire. Considérons par exemple "l'expérience" qui consiste à lancer un dé. On appelle "éventualité" associée à cette expérience un des résultats possibles de cette expérience, et "univers des possibles" l'ensemble $\Omega$ de ces éventualités. Dans notre exemple, les éventualités peuvent être 1, 2, 3, 4, 5 ou 6

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

On pourrait choisir aussi comme éventualités les résultats correspondant au "dé cassé". On peut donc tout de suite remarquer que l'ensemble $\Omega$ des univers du possible dépend de la modélisation, c'est à dire de la formalisation mathématique que l'on fait du problème. Notons qu'il est parfois difficile de définir l'ensemble $\Omega$.

Supposons que toutes les faces paires d'un dé soient effacées. Dans ce cas, si le résultat du lancer est pair, il nous est impossible de déterminer si la face 2 est survenue. On peut seulement déterminer si le résultat est pair ou impair et dans ce dernier cas, déterminer quelle était la face obtenue (1,3,5). Un sous-ensemble E de $\Omega$ correspond à l'événement et qu'un des éléments de E s'est réalisé. Si l'on retourne à l'expérience du lancer du dé, les événements qui sont observables seront tous les sous-ensembles de $\Omega$. Par exemple, l'événement $\{1; 2; 3\}$ est observable. Par contre, si l'on est dans le cas où les faces paires sont non différentiables, l'événement $\{1; 2; 3\}$ n'est plus observable puisqu'on n'est plus en mesure de déterminer si l'événement 2 est survenu. Dans ce dernier cas, les seuls événements possibles sont

$$\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1; 3\}, \{1; 5\}, \{3; 5\}, \{1; 3; 5\}, \{1; 2; 4; 6\},$$

$$\{2; 3; 4; 6\}, \{2; 4; 5; 6\}, \{1; 2; 3; 4; 6\}, \{1; 2; 4; 5; 6\}, \{2; 3; 4; 5; 6\}, \{2; 4; 6\}, \Omega.$$

Intuitivement, si deux événements sont observables, leur réunion devrait l'être aussi. De plus, le complémentaire d'un événement observable devrait être observable aussi car si on peut déterminer si l'événement E est survenu, alors on peut également déterminer si l'événement $E^c$ est survenu. Finalement, $\Omega$ survient à tous les coups, donc ce sont toujours des événements observables.

## 0.3 Terminologie et définitions

### Classe de parties

Soit $\Omega$ une partie d'éléments non vide. La classe (ensemble) des parties de $\Omega$, notée $\mathcal{P}(\Omega)$ est définie par :

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{\mathrm{A}, \quad \mathrm{A} \subseteq \Omega\}.$$

**Exemple 1.** $\Omega = \{a, b, c\}$. L'ensemble des parties de $\Omega$ est donné par :

$$\mathcal{P}(\Omega) = \Big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\}\ ,\{c\},\ \{a,b\},\ \{a,c\},\ \{b,c\},\ \{a,b,c\}\Big\}.$$

**Attention, on dit que a** $\in \boldsymbol{\Omega}$, $\{\mathbf{a}\} \subset \boldsymbol{\Omega}$, $\{\mathbf{a}\} \in \mathcal{P}(\boldsymbol{\Omega})$ **et** $\big\{\ \{\mathbf{a}\}\ \big\} \subset \mathcal{P}(\boldsymbol{\Omega})$.

### Le complémentaire d'un ensemble

Pour toute partie $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on note le complémentaire de A dans $\Omega$ par

$$\mathrm{A}^c = \Omega \backslash \mathrm{A} = \big\{x \in \Omega,\ x \notin \mathrm{A}\big\}.$$

**Propriété 1.**

Soient A et B deux parties de $\Omega$ alors

$$(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})^c = \mathrm{A}^c \cap \mathrm{B}^c \quad \text{et} \quad (\mathrm{A} \cap \mathrm{B})^c = \mathrm{A}^c \cup \mathrm{B}^c.$$

### Dénombrabilité d'un ensemble

Soit $\Omega$ un ensemble d'éléments. On dit que

- $\Omega$ est **infini** s'il existe $x_0 \in \Omega$ et une injection de $\Omega$ dans $\Omega \backslash \big\{x_0\big\}$.
- $\Omega$ est **dénombrable** s'il existe une bijection entre l'ensemble $\Omega$ et $\mathbb{N}$.
- $\Omega$ est **au plus dénombrable** s'il est fini ou dénombrable.

**Exemple 2.** $\mathbb{N}$ est infini car $0 \in \mathbb{N}$ et l'application

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & & n & \mapsto & n+1 \end{array}$$

est une injection.

**Exemple 3.**

- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ sont dénombrables.

  $\rightsquigarrow$ L'application
  $$\begin{array}{rccc} f & : \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & n & \mapsto & n \end{array}$$
  est une bijection.

  $\rightsquigarrow$ L'application
  $$\begin{array}{rccc} f & : \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z} \\ & n & \mapsto & x_n \end{array}$$
  où $x_{2k} = k$ et $x_{2k+1} = -k-1$, $k$ étant un entier naturel, est une bijection.

  $\rightsquigarrow$ L'application
  $$\begin{array}{rccc} f & : \mathbb{N} & \to & \mathbb{N}\times\mathbb{N} \\ & n & \mapsto & x_n \end{array}$$
  où $x_n = (i,j)$ tel que $i+j=n$ est une bijection.

- $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

## Une partition

On dit que $(\mathrm{A}_i)_{n\in\mathbb{N}^*}$ forme une partition de $\Omega$ si :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{A}_n \neq \emptyset$.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $n \neq m$, $\mathrm{A}_n \cap \mathrm{A}_m = \emptyset$.
- $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} \mathrm{A}_n = \Omega$.

## Différence symétrique

Soient A et B deux parties de $\Omega$. La différence symétrique de A et B notée $\mathrm{A} \bigtriangleup \mathrm{B}$ est l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B exclusivement.

$$\mathrm{A} \bigtriangleup \mathrm{B} = (\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) \setminus (\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$$

## Image réciproque et image directe

Soient E et F deux ensembles et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application.

- Soit $\mathrm{B} \subset \mathrm{F}$. On appelle image réciproque de B par $f$ l'ensemble des éléments x de E dont l'image $f(x)$ par $f$ est dans B. C'est un sous-ensemble de E ; on le note

$$f^{-1}(\mathrm{B}) = \{x \in \mathrm{E},\ f(x) \in \mathrm{B}\}.$$

- Soit $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$. On appelle image directe de A par $f$ l'ensemble des images $f(x)$ des éléments x de A. C'est un sous-ensemble de F ; on le note

$$f(\mathrm{A}) = \{y \in \mathrm{F},\ \exists x \in \mathrm{A} \ \text{ tel que } \ y = f(x)\}.$$

**Propriété 2.**

- On a $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, mais même si B est non vide, $f^{-1}(\mathrm{B})$ peut être vide.
- Pour toute partie B de F, $f\left(f^{-1}(\mathrm{B})\right) \subset \mathrm{B}$.

  $f\left(f^{-1}(\mathrm{B})\right) = \mathrm{B} \Longleftrightarrow f$ est surjective.
- Pour toute partie A de E, $\mathrm{A} \subset f^{-1}\left(f(\mathrm{A})\right)$.

  $\mathrm{A} = f^{-1}\left(f(\mathrm{A})\right) \Longleftrightarrow f$ est injective.
- Pour toute famille $(\mathrm{B}_i)_{i\in I}$ de parties de F,
  - $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} \mathrm{B}_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(\mathrm{B}_i)$.
  - $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} \mathrm{B}_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(\mathrm{B}_i)$.

## Limite inférieure et limite supérieure

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur $\Omega$. On définit :

$$\liminf f_n = \sup_{p\in\mathbb{N}} \left(\inf_{n\geq p} f_n(x)\right) \quad \text{et} \quad \limsup f_n = \inf_{p\in\mathbb{N}} \left(\sup_{n\geq p} f_n(x)\right).$$

## Partie positive et partie négative

$$f^+ = \sup(f, 0), \quad f^- = \sup(-f, 0) = (-f)^+.$$

**Propriétés 1.**

$$f = f^+ - f^- \quad \text{et} \quad |f| = f^+ + f^-.$$

## Fonction indicatrice

Soit $A \subset \Omega$. On appelle fonction indicatrice de $A$, notée $\mathbb{1}_A$ (ou $\chi_A$), la fonction de $\Omega$ dans $\{0,1\}$ qui, à tout $x \in \Omega$, associe 1 si $x \in A$ et 0 si $x \notin A$ :

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A \\ 0 & \text{si} \quad x \notin A \end{cases}$$

**Propriété 3** (Quelques propriétés sur la fonction indicatrice)**.**

a) $\forall x \in \Omega$, $\mathbb{1}_\emptyset(x) = 0$ et $\mathbb{1}_\Omega(x) = 1$.

b) $A \subset B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$ ;

c) $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A.\mathbb{1}_B = \inf(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$ ;

d) $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B} = \sup(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$ ;

e) $\mathbb{1}_{\Omega\setminus A} = 1 - \mathbb{1}_A$ ;

f) si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille dénombrable de parties de $\Omega$ telle que $A_n \cap A_p = \emptyset$ pour $n \neq p$ alors $\mathbb{1}_{\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i} = \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_i}$.

# 1 | Tribu et application mesurable

## Sommaire



## 1.1 Algèbre de Boole et tribu

**Définition 1.**

Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. On dit que $\mathcal{A}$ est une algèbre de Boole (de parties de $\Omega$) si elle vérifie :

1. $\Omega \in \mathcal{A}$,
2. $\mathrm{A} \in \mathcal{A} \Longrightarrow \Omega \backslash \mathrm{A} \in \mathcal{A}$,
3. $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$, $\mathrm{B} \in \mathcal{A} \Longrightarrow \mathrm{A} \cup \mathrm{B} \in \mathcal{A}$.

**Définition 2.**

Soit $\mathcal{T} \subset P(\Omega)$, on dit que $\mathcal{T}$ est une tribu de parties (ou $\sigma$-algèbre) si elle vérifie :

1. $\Omega \in \mathcal{T}$,
2. **la stabilité par passage au complémentaire :** $\mathrm{A} \in \mathcal{T} \Longrightarrow \Omega \backslash \mathrm{A} \in \mathcal{T}$,
3. **la stabilité par réunion dénombrable :** Si $\mathrm{A}_n \in \mathcal{T}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{A}_n \in \mathcal{T}$.

**Remarque 1.**

- Une tribu est donc une algèbre de Boole stable par réunion dénombrable.
- Si $\mathrm{A}_n \in \mathcal{T}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n \in \mathcal{T}$. (Démonstration en TD1)

**Définition 3.**

On appelle espace mesurable tout couple $(\Omega, \mathcal{T})$ formé par un ensemble $\Omega$ et une tribu $\mathcal{T}$ sur $\Omega$. Les ensembles mesurables sont les parties de $\Omega$ qui appartiennent à $\mathcal{T}$.

**Exemple 4.**

◇ La plus petite tribu de $\Omega$ est $\mathcal{T} = \{\emptyset, \Omega\}$, elle est appelée tribu grossière.

◇ La plus grande tribu de $\Omega$ est $\mathcal{T} = P(\Omega)$, elle est appelée tribu discrète.

**Exemple 5** (La tribu trace)**.** Soient $\mathcal{T}$ une tribu de parties sur $\Omega$ et $\mathrm{U} \subset \Omega$.

$$\mathcal{T}_{\mathrm{U}} = \{\mathrm{A} \cap \mathrm{U},\ \mathrm{A} \in \mathcal{T}\}$$

est une tribu sur U. Cette tribu est appelée la tribu trace sur U.
En effet,

⇝ $\mathrm{U} \in \mathcal{T}_{\mathrm{U}}$ car $\mathrm{U} = \Omega \cap \mathrm{U}$ et $\Omega \in \mathcal{T}$.

⇝ Soit $\mathrm{B} \in \mathcal{T}_{\mathrm{U}}$, donc $\mathrm{B} = \mathrm{A} \cap \mathrm{U}$ avec $\mathrm{A} \in \mathcal{T}$. Pour simplifier les notations, on notera $*^c$ le complémentaire de $*$ dans $\Omega$.

$$\mathrm{U} \setminus \mathrm{B} = \mathrm{U} \cap \mathrm{B}^c = \mathrm{U} \cap (\mathrm{A} \cap \mathrm{U})^c = \mathrm{U} \cap (\mathrm{A}^c \cup \mathrm{U}^c) = \mathrm{U} \cap \mathrm{A}^c.$$

Comme $\mathrm{A} \in \mathcal{T}$, $\mathcal{T}$ est une tribu sur $\Omega$ alors $\mathrm{A}^c \in \mathcal{T}$, il s'en suit que

$$\mathrm{U} \setminus \mathrm{B} = \mathrm{U} \cap \mathrm{A}^c, \quad \mathrm{A}^c \in \mathcal{T}$$

Donc $\mathrm{U} \setminus \mathrm{B} \in T_{\mathrm{U}}$.

⇝ Soit $\mathrm{B}_n \in T_{\mathrm{U}}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{B}_n = \mathrm{U} \cap \mathrm{A}_n$ avec $\mathrm{A}_n \in \mathcal{T}$.

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\mathrm{U} \cap \mathrm{A}_n) = \mathrm{U} \cap \left( \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n \right)$$

Et comme $\mathrm{A}_n \in \mathcal{T}$ et $\mathcal{T}$ est une tribu alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n \in \mathcal{T}$. Finalement

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n \in \mathcal{T}_{\mathrm{U}}.$$

## 1.2 Tribu engendrée, tribu borélienne

En général, une tribu contient énormément d'éléments d'où le nom de tribu. Souvent, on ne peut pas décrire tous les éléments d'une tribu mais cela n'a pas d'importance. En effet, ce qu'il faut retenir, sont certaines parties de $\Omega$ de la tribu et on doit rester dans la tribu lorsqu'on itère sur les éléments de la tribu les opérations de complémentarité et de réunion dénombrable.

### 1.2.1 Tribu engendrée

**Définition 4.**

Soit $\Omega$ un ensemble. $\Omega$ quelconque, $\mathrm{H} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. On dit que $\mathcal{T}$ est la tribu engendrée par H si $\mathcal{T}$ est **la plus petite tribu** (au sens de l'inclusion) de parties de $\Omega$ contenant $H$. On note dans ce cas, $\mathcal{T} = \sigma(H)$.

**Proposition 4.**

On considère un ensemble quelconque $\Omega$ et $\mathrm{H} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. $\sigma(H)$ existe toujours, c'est l'intersection de toutes les tribus sur $\Omega$ contenant H.

**Remarque 2.** Soient $\mathrm{H}_1 \subset \mathcal{P}(\Omega)$ et $\mathrm{H}_2 \subset \mathcal{P}(\Omega)$.

1. $\mathrm{H}_1 \subset \sigma(\mathrm{H}_1)$. (Par définition de $\sigma(\mathrm{H}_1)$.)

2. Si $\mathcal{T}$ est une tribu contenant H alors $\sigma(\mathrm{H}) \subset \mathcal{T}$. (Par définition de $\sigma(\mathrm{H})$.)

3. Si $\mathrm{H}_1 \subset \mathrm{H}_2$ alors $\sigma(\mathrm{H}_1) \subset \sigma(\mathrm{H}_2)$.

   - $\rightsquigarrow$ $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2 \subset \sigma(\mathcal{H}_2)$.
   - $\rightsquigarrow$ $\sigma(\mathcal{H}_2)$ est une tribu donc $\sigma(\mathcal{H}_2)$ est une tribu qui contient $\mathcal{H}_1$. Comme $\sigma(\mathcal{H}_1)$ est la plus petite tribu contenant $\mathcal{H}_1$ alors $\sigma(\mathcal{H}_1) \subset \sigma(\mathcal{H}_2)$.

**Exemple 6.**

- Si $\mathrm{H} = \{\emptyset\}$ ou bien si $\mathrm{H} = \{\Omega\}$, alors $\sigma(\mathrm{H}) = \{\emptyset, \Omega\}$
- Si $\mathrm{H} = \{\mathrm{A}\}$ ou bien si $\mathrm{H} = \{\mathrm{A}^c\}$ où $\mathrm{A} \neq \emptyset$ et $\mathrm{A} \neq \Omega$, alors $\sigma(\mathrm{H}) = \{\emptyset, \mathrm{A}, \mathrm{A}^c, \Omega\}$.

- Soient $\Omega = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}\}$, $\mathrm{H} = \{\{\mathrm{a}\}; \{\mathrm{b}\}\}$ ; on peut décrire la tribu engendrée par H :

$$\sigma(\mathrm{H}) = \left\{ \underbrace{\Omega}_{\Omega \in \text{tribu}} ; \emptyset ; \underbrace{\{\mathrm{a}\} \quad ; \{\mathrm{b}\}}_{\text{les éléments de H}} ; \underbrace{\{\mathrm{b}, \mathrm{c}\}}_{\{\mathrm{a}\}^c} ; \underbrace{\{\mathrm{a}, \mathrm{c}\}}_{\{\mathrm{b}\}^c} ; \underbrace{\{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}}_{\{\mathrm{a}\} \cup \{\mathrm{b}\}} ; \underbrace{\{\mathrm{c}\}}_{(\{\mathrm{a}\} \cup \{\mathrm{b}\})^c} \right\}.$$

### 1.2.2 Tribu borélienne

Si l'ensemble $\Omega$ possède une structure topologique [1], la notion de tribu engendrée permet de définir la plus petite tribu adaptée à cette structure.

**Définition 5.**

Soit $(\Omega, d)$ un espace métrique [a]. On appelle tribu borélienne de $\Omega$, la tribu engendrée par les ouverts de $(\Omega, d)$. On la note $\mathfrak{B}(\Omega)$ et ses éléments sont appelés les boréliens de $\Omega$.

*a.* $(\Omega, d)$ est un espace métrique si $\Omega$ est muni d'une distance $d : \Omega \to \mathbb{R}^+$ vérifiant les propriétés suivantes 1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, 2. $d(x, y) = d(y, x)$ et 3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

La tribu borélienne sur $\mathbb{R}$ (respectivement $\overline{\mathbb{R}}$) est la tribu engendrée par les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$.

**Exemple 7.** $[1; 2[ \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, en effet, $[1; 2[ = ]1; 2[ \cup \{1\}$ avec

- ♢ $]1; 2[ \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$,
- ♢ $\{1\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\left]1 - \frac{1}{n}; 1 + \frac{1}{n}\right[}_{\mathrm{A}_n \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})}$.

## 1.3 Applications mesurables

La notion de fonction mesurable étend la notion de fonctions continues. Elle prend son sens sur des ensembles munis d'une tribu et joueront un rôle important dans l'intégration au sens de Lebsgue.

1. $\mathcal{T}$ définit une topologie sur $\Omega$ si $\Omega \in \mathcal{T}$, $\emptyset \in \mathcal{T}$, la stabilité par union finie ou infinie et par intersection finie est vérifiée.

**Définition 6.**

Soient $(\Omega_1, \mathcal{T}_1)$ et $(\Omega_1, \mathcal{T}_1)$ deux espaces mesurables. Soit $f : \Omega_1 \to \Omega_1$. On dit que $f$ est $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$-mesurable si l'image réciproque de tout élément de $\mathcal{T}_2$ par $f$ appartient à $\mathcal{T}_1$ :

$$\forall \mathrm{B} \in \mathcal{T}_2, \quad f^{-1}(\mathrm{B}) \in \mathcal{T}_1.$$

Quand il n'y a pas de confusion possible, on dit que $f$ est mesurable.

**Exemple 8.** Si $f$ est une fonction constante sur $\Omega_1$ où $\Omega_1$ est muni de la tribu $\mathcal{T}_1$ alors $f$ est mesurable. En effet :

$$\forall x \in \Omega, f(x) = y_0, \quad \text{où} \quad y_0 \in \Omega_2.$$

$\Omega_2$ est munie de la tribu $\mathcal{T}_2$. Soit $\mathrm{B} \in \mathcal{T}_2$, donc

$$f^{-1}(\mathrm{B}) = \{x \in \Omega_1, \ y_0 \in \mathrm{B}\} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \ y_0 \notin \mathrm{B} \\ \\ \Omega_1 & \text{si } \ y_0 \in \mathrm{B} \end{cases}$$

Puisque $\mathcal{T}_1$ est une tribu sur $\Omega_1$ alors $\Omega_1 \in \mathcal{T}_1$ et $\emptyset \in \mathcal{T}_1$, ainsi $f^{-1}(\mathrm{B}) \in \mathcal{T}_1$.

**Définition 7.**

Si $(\mathrm{X}, d)$ et $(\mathrm{Y}, \delta)$ sont deux espaces métriques et si $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est $(\mathfrak{B}(\mathrm{X}), \mathfrak{B}(\mathrm{Y}))$-mesurable, on dit que $f$ est borélienne.

**Propriété 5.**

Soit $f : (\Omega_1, \mathcal{T}_1) \to (\Omega_2, \mathcal{T}_2)$. Si $\mathcal{T}_2$ est engendrée par une classe $C_2$, $\mathcal{T}_2 = \sigma(C_2)$ alors f est mesurable si et seulement si $\forall \mathrm{B} \in C_2, \quad f^{-1}(\mathrm{B}) \in \mathcal{T}_1$.

**Démonstration .**

- $\Rightarrow$) Supposons que $f$ est $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$-mesurable. Soit $\mathrm{B} \in C_2$.

  Comme $\mathcal{T}_2 = \sigma(C_2)$ alors $C_2 \subset \mathcal{T}_2$ et donc $\mathrm{B} \in \mathcal{T}_2$. La fonction $f$ étant $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$-mesurable, par définition, on obtient le résultat, $f^{-1}(\mathrm{B}) \in \mathcal{T}_1$.

- $\Leftarrow$) Supposons que $\forall \mathrm{B} \in C_2, \quad f^{-1}(\mathrm{B}) \in \mathcal{T}_1$. Soit $D \in \mathcal{T}_2$.

Comme $\mathcal{T}_2 = \sigma(C_2)$ alors $\exists J \subset \mathbb{N}$, $\exists \mathrm{B}_j \in C_2$, $j \in J$ tels que $D = \bigcup_{j\in J} \mathrm{B}_j$.

$$f^{-1}(D) = f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} \mathrm{B}_j\right) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(\mathrm{B}_j).$$

Comme $\mathrm{B}_j \in C_2$ alors, par hypothèse, $f^{-1}(\mathrm{B}_j) \in \mathcal{T}_1$. La propriété de stabilité par union dénombrable d'une tribu nous conduit à déduire que

$$\bigcup_{j\in J} f^{-1}(\mathrm{B}_j) \in \mathcal{T}_1.$$

Par conséquent, $f^{-1}(D) \in \mathcal{T}_1$. $f$ est donc $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$-mesurable.

**Corollaire 1.**

Soient $(\mathrm{X}, d)$ et $(\mathrm{Y}, \delta)$ deux espaces métriques et soit $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$. Si $f$ est continue [a], elle est borélienne.

*a.* Si $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ avec X et Y munis respectivement d'une structure topologique $\mathcal{T}_{\mathrm{X}}$ et $\mathcal{T}_{\mathrm{Y}}$, alors on dit que $f$ est continue si $f^{-1}(\underbrace{O_{\mathrm{Y}}}_{\in \mathcal{T}_{\mathrm{Y}}}) \in \mathcal{T}_{\mathrm{X}}$.

**Attention : la réciproque est fausse. Voir exemple 9**

**Démonstration .** Soit $O_{\mathrm{Y}}$ un ouvert de l'espace métrique $\mathrm{Y}, \delta)$. Comme $f$ est continue alors $f^{-1}(O_{\mathrm{Y}})$ est un ouvert de l'espace métrique $(\mathrm{X}, d)$.

- ⇝ D'après la définition 5, $O_{\mathrm{Y}} \in \mathfrak{B}(\mathrm{Y})$ et $f^{-1}(O_{\mathrm{Y}}) \in \mathfrak{B}(\mathrm{X})$.
- ⇝ D'après la propriété 5, l'application $f$ est mesurable.

## 1.4 Quelques propriétés

**Proposition 6.**

Soient $(\Omega_1, \mathcal{T}_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{T}_2)$ et $(\Omega_3, \mathcal{T}_3)$ des espaces mesurables. Soient

$$f : \Omega_1 \to \Omega_2 \quad \text{une fonction} \quad (\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)\text{-mesurable}$$

$$g : \Omega_2 \to \Omega_3 \quad \text{une fonction} \quad (\mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3)\text{-mesurable}$$

alors $g \circ f$ est $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_3)$-mesurable.

**Démonstration .** Soit $B \in \mathcal{T}_Z$,

$$(g \circ f)^{-1}(B) = \left(f^{-1} \circ g^{-1}\right)(B) = f^{-1} \underbrace{\left(g^{-1}(B)\right)}_{\in \mathcal{T}_Y} \in \mathcal{T}_X.$$

**Proposition 7 (Opérations sur les fonctions numériques).**

Soient $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable, $f, g : (\Omega, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ des fonctions mesurables et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors les fonctions

$$f+g, \quad fg, \quad \lambda f, \quad \min(f,g), \quad \max(f,g)$$

sont mesurables.

**Démonstration .**

1. On commence par démontrer la mesurabilité de $f+g$, $fg$ et $\lambda f$. Pour cela, on utilisera la proposition 5.

   On pose $\Phi$ l'application définie comme suit :

   $$\begin{array}{rccl} \Phi & : & \Omega & \to & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & (f(x), g(x)) \end{array}$$

   On note $\Psi_1$ et $\Psi_2$ deux applications réelles de $\mathbb{R}^2$ définies comme suit :

   $$\begin{array}{rcccl} \Psi_1 & : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & (x_1, x_2) & \mapsto & x_1 + x_2 \end{array} \quad \Bigg\| \quad \begin{array}{rcccl} \Psi_2 & : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & (x_1, x_2) & \mapsto & x_1 x_2 \end{array}$$

   $\Psi_1$ et $\Psi_2$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$ donc d'après le corollaire 1., $\Psi_1$ et $\Psi_2$ sont boréliennes.

   L'application $\Phi$ est borélienne, en effet, si $V$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ alors il existe des intervalles ouverts $I_n$ et $J_n$ de $\mathbb{R}$ tels que il

   $$V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (I_n \times J_n).$$

   En particulier,

   $$\Phi^{-1}(V) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Phi^{-1}(I_n \times J_n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(I_n) \cap g^{-1}(J_n).$$

   Par la mesurabilité de $f$ et de $g$, $f^{-1}(I_n) \in \mathcal{T}$ et $g^{-1}(J_n) \in \mathcal{T}$. Puisque $\mathcal{T}$ est stable par intersection et par réunion dénombrable alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(I_n) \cap g^{-1}(J_n) \in \mathcal{T}$. On en déduit que

$\Phi^{-1}(V) \in \mathcal{T}$. L'application $\Phi$ est donc une fonction mesurable.

(a) Notons que $f+g = \Psi_1 \circ \Phi$. $\Psi_1$ est borélienne, $\Phi$ est $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable. d'après la proposition 5., $\Psi_1 \circ \Phi$ est donc mesurable.

(b) Notons que $fg = \Psi_2 \circ \Phi$. $\Psi_2$ est borélienne, $\Phi$ est $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable. d'après la proposition 5., $\Psi_2 \circ \Phi$ est donc mesurable.

(c) $\lambda f$ est un cas particulier de $fg$ avec $g = \lambda$ une application constante. Donc $\lambda f$ est mesurable.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Puisque

$$\left\| \begin{array}{ccccc} \Big(\min(f,g)\Big)^{-1}\Big(]-\infty, a[\Big) & = & \Big\{\min(f,g) < a\Big\} & = & \{f < a\} \cap \{g < a\}. \\ \Big(\max(f,g)\Big)^{-1}\Big(]a, +\infty[\Big) & = & \Big\{\max(f,g) > a\Big\} & = & \{f > a\} \cup \{g > a\}. \end{array} \right.$$

$f$ et $g$ sont mesurables donc $\{f < a\} \in \mathcal{T}$, $\{f > a\} \in \mathcal{T}$, $\{g < a\} \in \mathcal{T}$ et $\{g > a\} \in \mathcal{T}$.

Puisque $\mathcal{T}$ est stable par union et par intersection alors

$$\{f < a\} \cap \{g < a\} \in \mathcal{T} \quad \text{et} \quad \{f < a\} \cup \{g < a\} \in \mathcal{T}$$

On déduit que les fonctions $\min(f,g)$ et $\max(f,g)$ sont mesurables.

## Conséquences

- Soient $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ des fonctions mesurables, alors $\inf_n f_n$ , $\sup_n f_n$, $\liminf_n f_n$ et $\limsup_n f_n$ sont mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable, alors $|f|$ est une fonction mesurable.

**Proposition 8.**

Soient $(\Omega_1, \mathcal{T}_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{T}_2)$ deux espaces mesurables. Soit $(U_n)_n$ une suite finie ou infinie d'éléments dans $\mathcal{T}_1$ telle que $\Omega_1 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Soit $f : \Omega_1 \to \Omega_2$, alors $f$ est $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$-mesurable si et seulement si $f_{|U_n}$ (restriction de $f$ à $U_n$) est $(\mathcal{T}_{U_n}, \mathcal{T}_Y)$-mesurable pour tout $n$.

**Exemple 9.** $X = Y = \mathbb{R}$, $\mathcal{T}_X = \mathcal{T}_Y = \mathfrak{B}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} f : \quad & X \to Y \\ & x \mapsto f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } \; x \neq 0 \\ \\ 1 & \text{si } \; x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On applique la proposition (8) avec $U_0 = \mathbb{R}^*$ et $U_1 = \{0\}$.

- $\mathbb{R}^*$ est ouvert $\Rightarrow U_0 \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$
- $\{0\}$ est fermé $\Rightarrow U_1 \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$
- $U_0 \cup U_1 = \mathbb{R}$
- $f_{|U_0}$ est continue $\Rightarrow f$ est $(\mathcal{T}_{\mathbb{R}^*}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$-mesurable.
- $f_{|U_1}$ est constante $\Rightarrow f$ est $(\mathcal{T}_{\{0\}}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$-mesurable.

D'où $f$ est $(\mathfrak{B}(\mathbb{R}), \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$-mesurable.

# 2 | Introduction à la mesure

La notion de mesure va étendre la notion usuelle de longueur pour les ensembles de $\mathbb{R}$, ou de volume pour ceux de $\mathbb{R}^d$, et ceci de deux manières :

- on veut pouvoir considérer des espaces de base plus généraux, ou plus "abstraits" (espaces de dimension infinie, espaces sur lesquels on définit les probabilités, etc ...)

- on veut englober dans le même cadre mathématique d'une part les notions de longueur, surface, volume, et d'autre part la notion de "masses" ou "charges ponctuelles" que l'on rencontre en mécanique ou en électricité.

## Sommaire



## 2.1 Fonction d'ensembles

Soient $\Omega$ un ensemble non vide et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de $\Omega$. Soit $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\Omega)$.

**Définition 1.**

Une fonction $\mathbf{m} : \mathcal{T} \longrightarrow [0, +\infty]$ est une fonction d'ensembles positive.

Une propriété que l'on exigera d'une telle fonction sera la $\sigma$-additivité au sens suivant :

**Définition 2.**

Une fonction $\mathbf{m} : \mathcal{T} \longrightarrow [0, +\infty]$ est $\sigma$-additive si et seulement si pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{T}$ telle que $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$ et $A_n \cap A_p = \emptyset$ pour $n \neq p$,

$$\mathbf{m}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{m}\left(A_n\right).$$

## 2.2 Mesure

Une "mesure abstraite" est une fonction d'ensemble vérifiant certaines propriétés. Soit $\Omega$ un ensemble non vide.

**Définition 3.**

Soient $\mathcal{T}$ une tribu de parties de $\Omega$ et $\mathbf{m} : \mathcal{T} \longrightarrow [0, +\infty]$ une fonction d'ensembles positive. $\mathbf{m}$ est une mesure positive sur $\mathcal{T}$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. $\mathbf{m}(\emptyset) = 0$ ;
2. $\mathbf{m}$ est $\sigma$-additive.

### 2.2.1 Exemples

**Masse ou mesure de Dirac**

Soient $x_0 \in \Omega$ et $\mathrm{A} \in \mathcal{P}(\Omega)$. On pose :

$$\delta_{x_0}(\mathrm{A}) = \begin{cases} 1 & \text{si} \;\; x_0 \in \mathrm{A} \\ 0 & \text{si} \;\; x_0 \notin \mathrm{A} \end{cases}$$

Si $\Omega$ est muni d'une tribu $\mathcal{T}$ alors $\delta_{x_0}$ est une mesure appelée mesure de Dirac de masse 1 et concentrée au point $x_0$.

**Mesure de comptage**

Soit $\mathbf{m} : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, +\infty]$ définie par

$$\mathbf{m}(\mathrm{A}) = \begin{cases} \text{card A} & \text{si A est fini} \\ \\ +\infty & \text{si A est infini} \end{cases}$$

**Remarque 1.** Par convention, $+\infty$ est considéré ici comme un élément de $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$

- ♢ $\mathbf{m}$ est une mesure.
- ♢ $\mathbf{m}$ aura beaucoup d'intérêt pour $\Omega = \mathbb{N}$.

**Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$**

Soit $\Omega$ l'ensemble des unions finies d'intervalles semi-ouverts. On se donne la fonction croissante $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ . Si

$$\mathrm{A} = [a_1, b_1[ \cup [a_2, b_2[ \cup \cdots \cup [a_n, b_n[$$

avec $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots < a_n < b_n$. On pose

$$\mathbf{m}(\mathrm{A}) = \sum_{i=1}^{n} (F(b_i) - F(a_i))$$

avec $F(+\infty) = \sup_{x \in \mathbb{R}} F(x)$ et $F(-\infty) = \inf_{x \in \mathbb{R}} F(x)$.
$\mathbf{m}$ est additive sur $\Omega$.
En prenant $F(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(b_i) - F(a_i)$ est la longueur de l'intervalle $[a_i, b_i[$.
On a alors

$$\mathbf{m}(\mathrm{A}) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

En prolongeant $\mathbf{m}$ à la plus petite tribu contenant $\Omega$, on obtient la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, notée $\lambda$. On a

$$\lambda(\{x\}) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \lambda([a_i, b_i[) = \lambda(]a_i, b_i[) = \lambda([a_i, b_i]) = b_i - a_i.$$

**Remarque 2.** pourquoi ne pas aller plus loin que la $\sigma$-additivité ?
On pourrait supposer pour une mesure $\mathbf{m}$ définie sur une tribu $\mathcal{T}$, la propriété suivante :
Si $\{\mathrm{A}_i, i \in I\}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{T}$ deux à deux disjoints et tel que $\bigcap_{i \in I} \mathrm{A}_i \in \mathcal{T}$ avec I quelconque (pas forcément dénombrable) alors

$$\mathbf{m}\Big(\bigcup_{i \in I} \mathrm{A}_i\Big) = \sum_{i \in I} \mathbf{m}(\mathrm{A}_i)$$

Cette propriété n'est pas naturelle, si $\lambda$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, on a $\lambda\Big(\{x\}\Big) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, avec la condition précédente, et en écrivant $[0,1] = \bigcup_{x \in [0,1]} \{x\}$ on aurait

$$\lambda\Big([0,1]\Big) = \sum_{x \in [0,1]} \lambda\Big(\{x\}\Big) = 0, \quad 0 \neq 1.$$

### 2.2.2 Conséquences de la $\sigma$-additivité

Soient $\Omega$ un ensemble, $\mathcal{T}$ une tribu de parties de $\Omega$ et $\mathbf{m}$ une mesure positive sur $\mathcal{T}$. On a les propriétés suivantes :

1. Si $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathcal{T}^2$ tels que $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ alors $\mathbf{m}(\mathrm{A}) \leq \mathbf{m}(\mathrm{B})$.
2. Si $\mathrm{A}_n \in \mathcal{T}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\mathbf{m}\Big(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n\Big) \leq \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{m}(\mathrm{A}_n)$.
3. Si $\mathrm{A}_n \in \mathcal{T}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $\mathrm{A}_n \subset \mathrm{A}_{n+1}$ alors
$$\mathbf{m}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{m}(\mathrm{A}_n).$$
4. Si $\mathrm{A}_n \in \mathcal{T}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $\mathrm{A}_{n+1} \subset \mathrm{A}_n$ et $\mathbf{m}(\mathrm{A}_0) < +\infty$ alors
$$\mathbf{m}\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{m}(\mathrm{A}_n).$$

**Démonstration .**

1. Soit A et B deux ensembles mesurables tels que $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$. On note
$$\mathrm{B}\backslash\mathrm{A} = \mathrm{B} \cap \big(\Omega\backslash\mathrm{A}\big).$$
Remarquons que,
$$\mathrm{A} \cup \big(\mathrm{B}\backslash\mathrm{A}\big) = \mathrm{B} \quad \text{et} \quad \mathrm{A} \cap \big(\mathrm{B}\backslash\mathrm{A}\big) = \emptyset.$$
Comme $\mathbf{m}$ est $\sigma$-additive alors
$$\mathbf{m}(\mathrm{B}) = \mathbf{m}(\mathrm{A}) + \underbrace{\mathbf{m}(\mathrm{B}\backslash\mathrm{A})}_{\geq 0} \quad (\text{d'après } \mathrm{A} \cup \big(\mathrm{B}\backslash\mathrm{A}\big) = \mathrm{B})$$
Donc $\boxed{\mathbf{m}(\mathrm{A}) \leq \mathbf{m}(\mathrm{B}).}$
2. Soit $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$. On pose
$$\mathrm{A}'_n = \mathbf{A}_n\backslash\Big(\bigcup_{j<n} \mathrm{A}_j\Big)$$
($\mathrm{A}'_n \in \mathcal{T}$ et $\mathrm{A}'_n$ peut être éventuellement vide). $\forall n \in \mathbb{N}$, on a
$$\mathrm{A}'_n \subset \mathbf{A}_n, \quad \mathrm{A}'_p \cap \mathrm{A}'_q = \emptyset \quad \text{pour} \quad p \neq q \quad \text{et} \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}'_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n.$$

Comme $\mathbf{m}$ est $\sigma$-additive, $\mathbf{m}\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n\big) = \mathbf{m}\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}'_n\big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{m}(\mathrm{A}'_n)$.

D'après la première propriété, $\mathrm{A}'_n \subset \mathrm{A}_n \Rightarrow \mathbf{m}(\mathrm{A}'_n) \leq \mathbf{m}(\mathrm{A}_n)$. D'où

$$\mathbf{m}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n\Big) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{m}(\mathrm{A}_n).$$

3. On garde la construction de la suite $(A'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de 2. Comme $\mathrm{A}_n \subset \mathrm{A}_{n+1}$ pour tout entier $n$ alors

$$\bigcup_{n=0}^{k} \mathrm{A}'_n = \bigcup_{n=0}^{k} \mathrm{A}_n = \mathrm{A}_k, \quad \text{(pour tout k)}.$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{m}\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n\big) &= \mathbf{m}\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}'_n\big) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{m}\left(\mathrm{A}'_n\right) && \sharp \ \text{par } \sigma - \text{additivité} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \mathbf{m}\left(\mathrm{A}'_k\right) && \sharp \ \text{série à termes positifs} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \mathbf{m}\big(\bigcup_{k=0}^{n} \mathrm{A}'_k\big) && \sharp \ \text{par } \sigma - \text{additivité} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \mathbf{m}\left(\mathrm{A}_n\right)
\end{aligned}$$

4. Soit $\mathrm{B}_n = \mathbf{A}_0 \backslash \mathrm{A}_n$. On a $B_n \subset \mathrm{B}_{n+1}$. D'après Pr.3.

$$\mathbf{m}\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n\big) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{m}(\mathrm{B}_n).$$

On a $\mathrm{A}_0 = \mathrm{A}_n \cup \mathrm{B}_n$ avec $\mathrm{A}_n \cap \mathrm{B}_n = \emptyset$ et comme $\mathbf{m}$ est $\sigma$-additive, alors :

$$\mathbf{m}(\mathrm{A}_0) = \mathbf{m}(\mathrm{A}_n) + \mathbf{m}(\mathrm{B}_n)$$

et donc $\mathbf{m}(\mathrm{B}_n) = \mathbf{m}(\mathbf{A}_0) - \mathbf{m}(\mathrm{A}_n)$. De même $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n = \mathrm{A}_0 \backslash \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{A}_n\right)$ donc $\mathbf{m}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n\right) = \mathbf{m}(\mathrm{A}_0) - \mathbf{m}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n\right)$. Ainsi

$$\mathbf{m}(\mathrm{A}_0) - \mathbf{m}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{m}(\mathrm{B}_n) = \lim_{n\to+\infty} [\mathbf{m}(\mathrm{A}_0) - \mathbf{m}(\mathrm{A}_n)]$$

Par linéarité de la limite, on en déduit $\mathbf{m}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{m}(\mathrm{A}_n)$ car $\mathbf{m}(\mathrm{A}_0) < +\infty$.

**Remarque 3.** Dans la propriété 4., on peut remplacer l'hypothèse

$$\text{"}\mathbf{m}(\mathrm{A}_0) < +\infty\text{"}$$

par "il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbf{m}(\mathrm{A}_k) < +\infty$".

**Mise en garde.**

Si on ne met pas l'hypothèse $\mathbf{m}(\mathrm{A}_0) < +\infty$ (ou il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbf{m}(\mathrm{A}_k) < +\infty$), la propriété 4. n'est plus valable.

Prenons $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{T} = P(\mathbb{N})$, $\mathbf{m}$ la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ définie par

$$\mathbf{m}(\mathrm{A}) = \begin{cases} \text{card A} & \text{si A est fini} \\ +\infty & \text{si A est infini} \end{cases}$$

Soit $\mathrm{A}_n = \{n, n+1, \ldots\}$, $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n = \emptyset$, donc $\mathbf{m}\left(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n\right) = 0$. D'autre part $\mathbf{m}(\mathrm{A}_n) = +\infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$, donc $\mathbf{m}\left(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n\right) \neq \lim\limits_{n} \mathbf{m}(\mathrm{A}_n)$.

## 2.3 Ensembles négligeables

Les ensembles négligeables jouent un rôle très important dans la théorie de la mesure et de l'intégration. Les ensembles négligeables vont permettre d'exprimer le fait que certaines propriétés ponctuelles (continuité, convergence simple, majoration,...) n'ont pas lieu en tout point mais seulement "**presque partout**", c'est à dire sur le complémentaire d'un ensemble négligeable.

Il s'avère techniquement nécessaire de ne pas restreindre la notion d'ensemble négligeable aux seuls sous-ensembles mesurables.

Dans tout ce chapitre, $\Omega$ désigne un ensemble quelconque non vide, $\mathcal{T}$ une tribu de parties de $\Omega$ et $\mathbf{m}$ une mesure positive sur $\mathcal{T}$. Le triplet $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{m})$ est appelé **un espace mesuré**.

**Définition 4.**

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{m})$ un espace mesuré.

1. On dit qu'un ensemble $\mathbf{N} \in \mathcal{T}$ est $\mathbf{m}$-négligeable si $\mathbf{m}(\mathbf{N}) = 0$.

2. On dit qu'une partie $N$ de $\Omega$ est $\mathbf{m}$-négligeable s'il existe $\mathrm{A} \in \mathcal{T}$ tel que $\mathbf{N} \subset \mathrm{A}$ et $\mathbf{m}(\mathrm{A}) = 0$.

**Exemple 1.** On considère l'espace mesuré $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{m})$ où $\Omega = \{a; b; c\}$, $a$, $b$ et $c$ des réels et $T = \{\Omega, \emptyset, \{a, b\}, \{c\}\}$.

- Cas où $\mathbf{m} = \delta_c$ est la mesure de Dirac concentrée en $c$.
  - $\rightsquigarrow$ Les parties mesurables de mesure nulle : $\delta_c(\emptyset) = 0$, $\delta_c(\{a, b\}) = 0$ car $c \notin \{a, b\}$.
  - $\rightsquigarrow$ Les parties non mesurables négligeables :
    - $\Diamond$ $\{a\} \subset \{a, b\}$ et $\delta_c(\{a, b\}) = 0$ donc $\{a\}$ est $\delta_c$-négligeable.
    - $\Diamond$ $\{b\} \subset \{a, b\}$ et $\delta_c(\{a, b\}) = 0$ donc $\{b\}$ est $\delta_c$-négligeable.

  Les ensembles $\delta_c$-négligeables sont donc $\emptyset$, $\{a, b\}$, $\{a\}$ et $\{b\}$.

- Cas où $\mathbf{m} = \mu_d$ est la mesure de comptage.
  - $\rightsquigarrow$ Les parties mesurables de mesure nulle : $\mu_d(\emptyset) = 0$.
  - $\rightsquigarrow$ Les parties non mesurables négligeables : La seule partie mesurable de mesure nulle est l'ensemble vide et ce dernier ne contient aucune partie de $\Omega$.

  L'unique ensemble $\mu_d$-négligeable est donc $\emptyset$.

- Cas où $\mathbf{m} = \lambda$ est la mesure de Lebesgue.
  - $\rightsquigarrow$ Les parties mesurables de mesure nulle : $\lambda(\emptyset) = 0$, $\lambda(\Omega) = \lambda(\{a, b, c\}) = 0$ car $\{a, b, c\}$ est dénombrable.

    $\{a, b\} \subset \Omega$, $\{c\} \subset \Omega$ et $\lambda(\Omega) = 0$ donc $\lambda(\{a, b\}) = \lambda(\{c\}) = 0$.
  - $\rightsquigarrow$ Les parties non mesurables négligeables : Toutes les parties de $\Omega$ sont par définition incluses dans $\Omega$, $\lambda(\Omega) = 0$ donc toutes les parties de $\Omega$ sont $\lambda$-négligeables.

  Les ensembles $\lambda$-négligeables sont donc toutes les parties de $\Omega$.

**Proposition 1.**

1. $\emptyset$ est $\mathbf{m}$-négligeable.
2. Si $N$ est un ensemble $\mathbf{m}$-négligeable, $N' \in \mathcal{T}$ avec $N' \subset N$, alors $N'$ est $\mathbf{m}$-négligeable.
3. La réunion d'une famille dénombrable d'ensembles $\mathbf{m}$-négligeables est $\mathbf{m}$-négligeable.

**Remarque 4.** Si $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathbf{m} = \lambda$ la mesure de Lebesgue et $\mathcal{T} = \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\{x\}$ est $\lambda$-négligeable. $\{x\}$ est fermé et $\lambda\big(\{x\}\big) = 0$.

**Mise en garde.**

La réunion d'une famille infinie non dénombrable d'ensembles **m**-négligeables n'est pas **m**-négligeable.

En effet, pour $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ et $\mathbf{m} = \lambda$ où $\lambda$ est la mesure de Lebesgue, on considère

$$A = [0, 1].$$

$A \in \mathcal{T}$ et $\lambda(A) = 1$. $A$ n'est pas $\lambda$-négligeable.

De plus, on peut écrire $A = \bigcup\limits_{x \in [0,1]} \{x\}$ avec $\{x\}$ $\lambda$-négligeable, $\forall x \in [0, 1]$. Donc

$$\bigcup_{x \in [0,1]} \{x\}$$

n'est pas $\lambda$-négligeable.

**Définition 5.**

Une propriété $\mathcal{P}(x)$ dépendant de l'élément $x \in \Omega$ est dite vérifiée **m**-presque partout (ou simplement presque partout quand il n'y a pas d'ambiguïté) si l'ensemble des $x$ de $\Omega$ pour lesquels la propriété $\mathcal{P}(x)$ est fausse est **m**-négligeable.

On écrira en abrégé $\mathcal{P}(x)$ est **m**-p.p. (ou simplement p.p. quand il n'y a pas d'ambiguïté).

## 2.4 Espaces mesurés complets

On a vu dans la définition (4) qu'une partie $N$ de $\Omega$ **m**-négligeable n'est pas nécessairement un élément de $\mathcal{T}$. Pourtant pour respecter le principe de monotonie croissante de la mesure **m**, il est naturel d'attribuer à $N$ la mesure 0. On est alors en train d'élargir la tribu $\mathcal{T}$. D'où la définition suivante :

**Définition 6.**

Si toutes les parties de $\Omega$ **m**-négligeables sont mesurables, on dit que l'espace $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{m})$ est complet.

**Exemple 2.** On considère l'espace mesuré $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{m})$ où $\Omega = \{a; b; c\}$, $a$, $b$ et $c$ des réels et $\mathcal{T} = \{\Omega, \emptyset, \{a, b\}, \{c\}\}$.

- Cas où $\mathbf{m} = \delta_c$ est la mesure de Dirac concentrée en $c$. L'ensemble des parties $\delta_c$-négligeables est
$$\mathcal{N} = \{\emptyset, \{a, b\}, \{a\}, \{b\}\}$$
$\{a\}$ est $\delta_c$-négligeable mais non mesurable donc $(\Omega, \mathcal{T}, \delta_c)$ n'est pas un espace mesuré complet.

- Cas où $\mathbf{m} = \mu_d$ est la mesure de comptage. L'ensemble des parties $\mu_d$-négligeables est
$$\mathcal{N} = \{\emptyset\}.$$
$\emptyset$ est $\mu_d$-négligeable et mesurable donc $(\Omega, \mathcal{T}, \mu_d)$ est un espace mesuré complet.

- Cas où $\mathbf{m} = \lambda$ est la mesure de Lebesgue. L'ensemble des parties $\lambda$-négligeables est
$$\mathcal{N} = \mathcal{P}(\Omega).$$
$\{a\}$ est $\lambda$-négligeable mais non mesurable donc $(\Omega, \mathcal{T}, \lambda)$ n'est pas un espace mesuré complet.

Lorsqu'un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{m})$ n'est pas complet, on peut le *compléter* canoniquement de la façon suivante :

**Proposition 2.**

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{m})$ un espace mesuré et soit $\mathcal{N}$ l'ensemble des parties $\mathbf{m}$-négligeables. On considère
$$\widetilde{\mathcal{T}} = \{A \cup N; A \in \mathcal{T} \text{ et } N \in \mathcal{N}\}.$$
Pour tout $A \in \mathcal{T}$ et pour tout $N \in \mathcal{N}$, on pose $\widetilde{\mathbf{m}}(A \cup N) = \mathbf{m}(A)$. Alors

1. $\widetilde{\mathcal{T}}$ est une tribu sur $\Omega$ contenant $\mathcal{T}$ ;
2. $\widetilde{\mathbf{m}}$ définit une mesure positive sur $\widetilde{\mathcal{T}}$ qui coïncide avec $\mathbf{m}$ sur $\mathcal{T}$ ;
3. Si on note $\widetilde{\mathcal{N}}$ la famille des sous-ensembles de $X$ $\widetilde{\mathbf{m}}$-négligeables alors $\widetilde{\mathcal{N}} = \mathcal{N}$ ;
4. $(\Omega, \widetilde{\mathcal{T}}, \widetilde{\mathbf{m}})$ est un espace mesuré complet.

**Définition 7.**

On dit que $(\Omega, \widetilde{\mathcal{T}}, \widetilde{\mathbf{m}})$ est le **complété** de l'espace mesuré $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{m})$.

**Remarque 5.**

- Un espace mesuré complet est égal à son complété.
- Si $\mathcal{P}(x)$ est une propriété dépendant de $x \in \Omega$ alors, $\mathcal{P}(x)$ est vraie $\mathbf{m}$-p.p. si et seulement si $\mathcal{P}(x)$ est vraie $\widetilde{\mathbf{m}}$-p.p.

**Mise en garde.**

La tribu $\widetilde{\mathcal{T}}$ dépend et de la tribu $\mathcal{T}$ et de la mesure $\mathbf{m}$ par rapport à laquelle on effectue la complétion.

**Exemple 3.** On considère l'espace mesuré $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{m})$ où $\Omega = \{a; b; c\}$, $a$, $b$ et $c$ des réels et $\mathcal{T} = \{\Omega, \emptyset, \{a, b\}, \{c\}\}$.

- Cas où $\mathbf{m} = \delta_c$ est la mesure de Dirac concentrée en $c$. L'ensemble des parties $\delta_c$-négligeables est

$$\mathcal{N} = \{\emptyset, \{a, b\}, \{a\}, \{b\}\}$$

  $(\Omega, \mathcal{T}, \delta_c)$ n'est pas un espace mesuré complet et son complété est obtenu par union des ensembles mesurables et les ensembles négligeables :

| $A \in \mathcal{T}$ / $N \in \mathcal{N}$ | $\Omega$ | $\emptyset$ | $\{a, b\}$ | $\{c\}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\emptyset$ | $\Omega$ | $\emptyset$ | $\{a, b\}$ | $\{c\}$ |
| $\{a, b\}$ | $\Omega$ | $\{a, b\}$ | $\{a, b\}$ | $\Omega$ |
| $\{a\}$ | $\Omega$ | $\{a\}$ | $\{a, b\}$ | $\{a, c\}$ |
| $\{b\}$ | $\Omega$ | $\{b\}$ | $\{a, b\}$ | $\{b, c\}$ |

Tableau 1. Les unions $A \cup N$

  La tribu complétée dans ce cas est donc $\tilde{\mathcal{T}} = \{\Omega, \emptyset, \{a, b\}, \{c\}, \{a\}, \{b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$.

- Cas où $\mathbf{m} = \mu_d$ est la mesure de comptage. $(\Omega, \mathcal{T}, \mu_d)$ est un espace mesuré complet donc $\tilde{\mathcal{T}} = \mathcal{T}$.

- Cas où $\mathbf{m} = \lambda$ est la mesure de Lebesgue. L'ensemble des parties $\lambda$-négligeables est

$$\mathcal{N} = \mathcal{P}(\Omega).$$

  $(\Omega, \mathcal{T}, \lambda)$ n'est pas un espace mesuré complet et dans ce cas $\tilde{\mathcal{T}} = \mathcal{P}(\Omega)$.

**Remarque 6 (La tribu de Lebesgue $\mathcal{L}(\mathbb{R})$).** Si $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{m}) = (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. L'espace $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ n'est pas complet.

- La tribu $\widetilde{\mathcal{T}}$ est la tribu de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et on la note $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ ;
- La mesure $\widetilde{\mathbf{m}}$ s'appelle aussi la mesure de Lebesgue et sera aussi notée $\lambda$ au lieu de $\widetilde{\lambda}$ ;
- Les éléments de $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ sont appelés parties mesurables au sens de Lebesgue ou parties Lebesgue-mesurables.

# 3 | Intégration de fonctions étagées positives

Dans la suite de ce cours, on considère l'espace mesuré $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$. Les fonctions étagées jouent, dans la construction de l'intégrale de Lebesgue, le rôle réservé aux fonctions en escalier dans la théorie de l'intégrale de Riemann.

**Sommaire**



## 3.1 Fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ sur $[0;1]$

Soit la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0;1]$ par : $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$
On va montrer que cette fonction n'est pas intégrable au sens de Riemann. Notons

$$P_n = \left\{ x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \cdots, x_{n-1}^{(n)}, x_n^{(n)} \right\}$$

où $x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_n^{(n)}$, $x_0^{(n)} = 0$, $x_n^{(n)} = 1$ une subdivision du segment $[0;1]$. Soit de plus $C_n = \{C_n(i)\}_{1 \leq i \leq n}$ un ensemble de points tels que

$$x_{i-1}^{(n)} < C_n(i) < x_i^{(n)}.$$

On définit alors la somme de Riemann $S(f, P_n, C_n)$ associée à la fonction $f$, à la subdivision $P_n$, et à l'ensemble $C_n$ par :

$$S(f, P_n, C_n) = \sum_{i=1}^{n} f(C_n(i)) \left( x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)} \right).$$

On sait alors que l'intégrale de Riemann $I_R(f)$ de $f$, si elle existe, est définie par :

$$I_R(f) = \int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} S(f, P_n, C_n). \tag{3.1}$$

De plus, cette définition est indépendante du choix de la suite de subdivisions $P_n$ et de l'ensemble $C_n$. On considère la subdivision suivante :

$$P_n = \left\{0; \frac{1}{n}; \frac{2}{n}; \cdots; \frac{n-1}{n}; 1\right\},$$

et les deux ensembles distincts suivants :

$$\begin{aligned} C_n &= \{C_n(i)\}_{1\le i\le n} \quad \text{avec} \quad C_n(i) \in \left]x_{i-1}^{(n)}; x_i^{(n)}\right[ \cap \mathbb{Q}. \\ C_n^{'} &= \left\{C_n^{'}(i)\right\}_{1\le i\le n} \quad \text{avec} \quad C_n^{'}(i) \in \left]x_{i-1}^{(n)}; x_i^{(n)}\right[ \setminus \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

Autrement dit, $C_n(i)$ et $C_n^{'}(i)$ sont respectivement rationnel et irrationnel, on a :

$$\forall i \in \{1, \cdots, n-1\}, \quad f(C_n(i)) = 1 \text{ et } f\left(C_n^{'}(i)\right) = 0.$$

La relation (3.1) entraine que

$$\lim_{n\to+\infty} S(f, P_n, C_n) = \lim_{n\to+\infty} S\left(f, P_n, C_n^{'}\right). \tag{3.2}$$

Or

$$\begin{aligned} S(f, P_n, C_n) &= \sum_{i=1}^{n} f(C_n(i)) \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 = 1 \\ S\left(f, P_n, C_n^{'}\right) &= \sum_{i=1}^{n} f\left(C_n^{'}(i)\right) \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 0 = 0 \end{aligned}$$

ce qui contredit l'égalité (3.2) ainsi la fonction $f$ n'est pas Riemann-intégrable.

## Autre point de vue ?

Construire une subdivision de $f([0;1])$. On sait que $f([0;1]) = \{0;1\}$ donc on prendra la subdivision

$$F_n = \{y_0; y_1\}$$

où $y_0 = 0$ et $y_1 = 1$, on a bien $y_0 < y_1$. On définit alors la somme $S(f, F_n)$ associée à la fonction $f$ et à la subdivision $F_n$ par :

$$S(f, F_n) = \sum_{i=1}^{2} \left(\text{mesure de} f^{-1}(\{y_i\})\right) y_i.$$

Si on fait le choix de travailler avec la mesure de Lebesgue $\lambda$, alors

$$\begin{aligned} S(f, F_n) &= \lambda\left(f^{-1}(\{0\})\right) \times 0 + \lambda\left(f^{-1}(\{1\})\right) \times 1 \\ &= \lambda([0;1] \setminus \mathbb{Q}) \times 0 + \lambda([0;1] \cap \mathbb{Q}) \times 1 \\ &= 1 \times 0 + 0 \times 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

N'ayant qu'une seule subdivision possible, la somme $S$ correspond alors à l'intégrale qu'on souhaite calculer.

## 3.2 Fonctions étagées

**Définition 1.**
Soit $f$ une fonction de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$. La fonction $f$ est dite $\mathcal{T}$-étagée si $f$ est $(\mathcal{T}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$-mesurable et $f(\Omega)$ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}$.

**Exemple 1.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\varphi = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}$ où $a_i \in \mathbb{R}$ et $A_i \in \mathcal{T}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

- $\varphi$ est mesurable car c'est une combinaison linéaire de fonctions mesurables.
- $\varphi$ prend un nombre fini de valeurs $(a_i)_{i=1,\cdots,n}$

$\varphi$ est donc une fonction $\mathcal{T}$-étagée.

**Notations :**

$$\mathcal{E}(\Omega, \mathcal{T}) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \quad \mathcal{T}\text{- étagées}\}$$

$$\mathcal{E}_+(\Omega, \mathcal{T}) = \{f : \Omega \to [0, +\infty[ \quad \mathcal{T}\text{- étagées}\}$$

**Représentation canonique d'une fonction étagée**

Soit $f$ une fonction étagée. Désignons par $a_1, \ldots, a_m$ les éléments de $f(\Omega)$, la suite $(a_i)_{1 \le i \le m}$ étant strictement croissante, et posons pour tout $i \in [\![1, m]\!]$

$$A_i = f^{-1}(\{a_i\}).$$

Les sous-ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_m$ de $\Omega$ sont non vides, mesurables, deux à deux disjoints et de réunion $\Omega$. Ainsi $f$ s'écrit sous la forme

$$f = \sum_{i=1}^{m} a_i \mathbb{1}_{A_i} \tag{3.3}$$

Inversement, étant données une suite strictement croissante $(a_i)_{1\leq i\leq m}$ d'éléments de $\mathbb{R}$ et une suite $(A_i)_{1\leq i\leq m}$ de sous-ensembles de $\Omega$, mesurables, non vides, deux à deux disjoints et dont la réunion est $\Omega$, il existe une fonction étagée $f$ de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$ et une seule telle que

$$f = \sum_{i=1}^{m} a_i \mathbb{1}_{A_i}.$$

On dira que le couple $\big((a_1, \ldots, a_m), (A_1, \ldots, A_m)\big)$ est le couple canonique de $f$ et que (3.3) est la représentation canonique de $f$.

**Exemple 2.**

1. Soit $A \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$. La fonction $u = \mathbb{1}_A$ est étagée et a pour représentation canonique

$$u = 0 \times \mathbb{1}_{A^C} + 1 \times \mathbb{1}_A.$$

2. $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Soit $\varphi = \mathbb{1}_{]0,+\infty[}$, son écriture canonique est :

$$\varphi = 0 \times \mathbb{1}_{]-\infty,0]} + 1 \times \mathbb{1}_{]0,+\infty]}.$$

D'autres écritures non canoniques de $\varphi$ :

$$\varphi = \underbrace{0}_{a_1} \times \mathbb{1}_{]-\infty,0]} + \underbrace{1}_{a_2} \times \mathbb{1}_{]0,1[} + \underbrace{1}_{a_3} \times \mathbb{1}_{[1,+\infty[} \qquad a_2 = a_3 \Longrightarrow \quad \text{pas canonique}$$

$$\varphi = 0 \times \mathbb{1}_{\underbrace{]-\infty,0]}_{A_1}} + \frac{1}{3} \times \mathbb{1}_{\underbrace{]0,+\infty[}_{A_2}} + \frac{2}{3} \times \mathbb{1}_{\underbrace{]0,+\infty[}_{A_3}}, \; A_2 \cap A_3 \neq \emptyset \Longrightarrow \text{pas canonique}$$

**Propriétés 2** (Opérations sur les fonctions étagées)**.**

Soient $\varphi$ et $\psi$ deux fonctions étagées sur $\Omega$, $\alpha$ et $\beta$ deux réels alors les fonctions

- $\alpha\varphi + \beta\psi$ • $\varphi\psi$ • $\sup(\varphi, \psi)$ • $\inf(\varphi, \psi)$

sont des fonctions étagées sur $\Omega$.

## 3.3 Intégrale d'une fonction étagée positive

**Définition 2.**

Soit $\varphi \in \mathcal{E}_+(\Omega, \mathcal{T})$ et $\sum_{i=1}^{m} a_i \mathbb{1}_{A_i}$ sa représentation canonique. On appelle intégrale de $\varphi$ sur $\Omega$ par rapport à la mesure $\mu$ et on note $\int_\Omega \varphi d\mu$ ou $\int_\Omega \varphi(x) d\mu(x)$, la somme $\sum_{i=1}^{m} a_i \mu(A_i)$ :

$$\int_\Omega \varphi d\mu = \sum_{i=1}^{m} a_i \mu(A_i)$$

En vertu de la convention $0 \times \mu(A) = 0$ si $\mu(A) = +\infty$, la somme $\sum_{i=1}^{m} a_i \mu(A_i)$ a toujours un sens dans $[0, +\infty]$ puisque chaque terme $a_i \mu(A_i)$ appartient à $[0, +\infty]$.
On dit qu'une fonction étagée et positive $\varphi$ est $\mu$-intégrable si $\int_\Omega \varphi d\mu < +\infty$.

**Exemple 10.** On prend $(\Omega, \mathcal{T}) = (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ et $\varphi = \mathbb{1}_\mathbb{R}$. Il est clair que $\varphi \in \mathcal{E}_+(X, \mathcal{T})$.

- Pour $\mu = \lambda$, on a $\int_\mathbb{R} \varphi d\lambda = \lambda(\mathbb{R}) = +\infty$.
- Pour $\mu = \delta_0$, on a $\int_\mathbb{R} \varphi d\delta_0 = \delta_0(\mathbb{R}) = 1$

**Définition 3.**

Soit $\varphi \in \mathcal{E}_+(\Omega, \mathcal{T})$ et $\sum_{i=1}^{m} a_i \mathbb{1}_{A_i}$ sa représentation canonique. Soit $A$ une partie mesurable.
On définit l'intégrale de $\varphi$ sur $A$ :

$$\int_A \varphi d\mu = \int_\Omega \varphi \mathbf{1}_A d\mu = \sum_{i=1}^{m} a_i \mu(A_i \cap A).$$

Le calcul de l'intégrale d'une fonction étagée à partir de la définition (2) nécessite la décomposition canonique. Le lemme suivant nous permet d'alléger le recours systématique à cette décomposition.

**Lemme 1.**

Soit $\varphi$ une fonction étagée positive telle que $\varphi = \sum_{i=1}^{p} t_i \mathbb{1}_{C_i}$ où $C_i$ sont des ensembles mesurables et disjoints deux à deux et $t_i$ sont des constantes **pas forcément distinctes** alors

$$\int_\Omega \varphi d\mu = \sum_{i=1}^{p} t_i \mu(C_i).$$

**Propriétés 3.**

Soient $\varphi \in \mathcal{E}_+(\Omega, \mathcal{T})$, $\psi \in \mathcal{E}_+(\Omega, \mathcal{T})$ et $r \in [0, +\infty[$.

♠ **Homogénéité :** $\int_\Omega r\varphi d\mu = r \int_\Omega \varphi d\mu.$

♠ **Additivité :** $\int_\Omega (\varphi + \psi) d\mu = \int_\Omega \varphi d\mu + \int_\Omega \psi d\mu.$

♠ **Croissance :** $\varphi \leq \psi \Rightarrow \int_\Omega \varphi d\mu \leq \int_\Omega \psi d\mu.$

**Démonstration .**

1. Soient $\varphi \in \mathcal{E}_+(\Omega, \mathcal{T})$ et $\sum_{i=1}^{m} a_i \mathbb{1}_{A_i}$ sa représentation canonique. Si $r = 0$,

$$\int_\Omega 0 \times \varphi d\mu = 0 = 0 \times \int_\Omega \varphi d\mu.$$

   Il convient de remarquer que si $\int_\Omega \varphi d\mu = +\infty$ alors $0 \times \int_\Omega \varphi d\mu = 0$ en vertu de la convention $0 \times \mu(A) = 0$ si $\mu(A) = +\infty$.

   Si $r > 0$. La suite $(a_i)_{1 \leq i \leq m}$ est strictement croissante donc la suite $(ra_i)_{1 \leq i \leq m}$ est strictement croissante car $r$ est strictement positif. $\sum_{i=1}^{m} ra_i \mathbb{1}_{A_i}$ est donc la représentation canonique de $r\varphi$ donc $r\varphi$ est une fonction étagée positive. D'après la définition de l'intégrale d'une fonction étagée :

$$\int_\Omega r\varphi d\mu = \sum_{i=1}^{m} ra_i \mu(A_i) = r \sum_{i=1}^{m} a_i \mu(A_i) = r \int_\Omega \varphi d\mu.$$

2. Soient $(\varphi, \psi) \in (\mathcal{E}_+(\Omega, \mathcal{T}))^2$ telles que $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}$ et $\psi = \sum_{i=1}^{m} b_i \mathbb{1}_{B_i}$ leur représentation canonique. $\varphi + \psi$ est une fonction étagée et

$$\varphi + \psi = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (a_i + b_j) \mathbb{1}_{A_i \cap B_j},$$

$(A_i \cap B_j)_{i,j}$ sont disjoints deux à deux. Notons que $a_i + b_j$ ne sont pas forcément distincts deux à deux.

D'après le lemme

$$\begin{aligned}\int_\Omega (\varphi + \psi)\, d\mu &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (a_i + b_j)\, \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{m} \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{j=1}^{m} b_j \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) + \sum_{j=1}^{m} b_j \mu(B_j)\end{aligned}$$

En effet, $\sum_{j=1}^{m} \mu(A_i \cap B_j) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{m} A_i \cap B_j\right) = \mu\left(A_i \cap \bigcup_{j=1}^{m} B_j\right)$ et comme $\bigcup_{j=1}^{m} B_j = \Omega$ alors $\sum_{j=1}^{m} \mu(A_i \cap B_j) = \mu(A_i)$. De la même façon, on obtient $\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i \cap B_j) = \mu(B_j)$.

Puisque $\int_\Omega \varphi d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i)$ et $\int_\Omega \psi d\mu = \sum_{j=1}^{m} b_j \mu(B_j)$, on en déduit l'égalité recherchée.

3. Si $\varphi \in \mathcal{E}_+(\Omega, \mathcal{T})$, $\psi \in \mathcal{E}_+(\Omega, \mathcal{T})$ et $\varphi \leq \psi$ alors $\psi - \varphi \in \mathcal{E}_+(\Omega, \mathcal{T})$. Remarquons que

$$\psi = (\psi - \varphi) + \varphi.$$

Par additivité, on peut écrire $\int_\Omega \psi d\mu = \int_\Omega (\psi - \varphi)\, d\mu + \int_\Omega \varphi d\mu$. Puisque $\int_\Omega (\psi - \varphi)\, d\mu \geq 0$ alors $\int_\Omega \psi d\mu - \int_\Omega \varphi d\mu \geq 0$, soit $\int_\Omega \varphi d\mu \leq \int_\Omega \psi d\mu$.

**Proposition 9.**

Si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions étagées positives qui tend $\mu$-p.p vers une fonction étagée $\varphi$, alors la suite $\left(\int_\Omega \varphi_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\int_\Omega \varphi d\mu$ :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_\Omega \varphi_n d\mu\right) = \int_\Omega \lim_{n\to+\infty} \varphi_n d\mu = \int_\Omega \varphi d\mu.$$

## 3.4 Intégration de fonctions mesurables positives

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable. On note

$$\boxed{\overline{\mathfrak{L}}_+(\Omega,\mathcal{T}) = \left\{f : \Omega \to [0,+\infty],\, \left(\mathcal{T}, \mathfrak{B}\left(\overline{\mathbb{R}}_+\right)\right)\text{-mesurables.}\right\}}$$

Le théorème suivant nous permettra de faire le lien entre les fonctions étagées positives et les fonctions mesurables positives. Il sera d'une grande utilité dans la démonstration de beaucoup de propriétés dans les exercices.

**Théorème 1.**

Si $f \in \overline{\mathfrak{L}}_+(\Omega,\mathcal{T})$, il existe une suite croissante $(\varphi_n)_n$ dans $\mathcal{E}_+(\Omega,\mathcal{T})$ telle que $(\varphi_n)_n$ converge simplement vers $f$ sur $\Omega$. Si de plus, $f$ est bornée, alors $(\varphi_n)_n$ converge uniformément vers $f$ sur $\Omega$.

**Démonstration .** Pour $n$ et $k$ dans $\mathbb{N}$, on pose

$$A_{n,k} = \left\{x \in \Omega,\ \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}\right\} \quad \text{et} \quad A_n = \{x \in \Omega,\ f(x) \geq n\}\,.$$

On considère $\varphi_n = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^n}\mathbb{1}_{A_{n,k}}\right) + n\mathbb{1}_{A_n}$.

À $n$ fixé :

- Si $f(x) \geq n$ alors $\varphi_n(x) = n$.

- Sinon il existe $k \in \{0,\cdots,n2^n\}$, $f(x) \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[ \Rightarrow \varphi_n(x) = \frac{k}{2^n}$.
  Montrons que $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$.
  $\rightsquigarrow$ Si $x \in A_{n,k}$, $\varphi_n(x) = \frac{k}{2^n}$, calculons $\varphi_{n+1}(x)$.

$$f(x) \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[ = \left[\frac{2k}{2^{n+1}}, \frac{2k+1}{2^{n+1}}\right[ \cup \left[\frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{2k+2}{2^{n+1}}\right[$$

$$\varphi_{n+1}(x) = \begin{cases} \dfrac{2k}{2^{n+1}} = \dfrac{k}{2^n} & \text{si } f(x) \in \left[\dfrac{2k}{2^{n+1}}, \dfrac{2k+1}{2^{n+1}}\right[ \\[2ex] \dfrac{2k+1}{2^{n+1}} = \dfrac{k}{2^n} + \dfrac{1}{2^{n+1}} & \text{si } f(x) \in \left[\dfrac{2k+1}{2^{n+1}}, \dfrac{2k+2}{2^{n+1}}\right[ \end{cases}$$

  donc $\varphi_{n+1}(x) \geq \varphi_n(x)$.
  $\rightsquigarrow$ Si $x \in A_n$ alors $\varphi_n(x) = n$ et $\varphi_{n+1}(x) = \left\{n, n+\frac{1}{2^{n+1}}, n+\frac{1}{2^n}, \ldots\right\}$ Donc $\varphi_{n+1} \geq \underbrace{n}_{\varphi_n}$.
  Soit $x \in \Omega$, alors

  - $\star$ ou bien $f(x) = +\infty$,
    $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \in A_n \Rightarrow \varphi_n(x) = n \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$ et donc $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n(x)$

⋆ ou bien $f(x) < +\infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $f(x) \leq n_0$.

$$\forall n \geq n_0, \quad x \in A_{n,k}, \quad | \varphi_n(x) - f(x) | \leq \frac{1}{2^n} \to 0, \quad \text{lorsque} \quad n \to +\infty$$

donc $(\varphi_n)_n$ converge simplement vers $f$ sur $\Omega$.
Si $f$ est bornée, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $| f(x) | \leq n_0$, on se replace dans le deuxième cas et on a la convergence uniforme de $(\varphi_n)_n$ vers $f$ sur $\Omega$.

**Définition 4.**

Soit $f$ une fonction de $f$ de $\overline{\mathfrak{L}}_+(\Omega, \mathcal{T})$. On appelle intégrale de Lebesgue de $f$ sur $\Omega$ par rapport à la mesure $\mu$, et on note $\int_\Omega f d\mu$ ou $\int_\Omega f(x) d\mu(x)$, l'élément de $[0, +\infty]$ suivant

$$I(f) = \sup \left\{ \int \varphi d\mu, \quad \varphi \in \mathcal{E}_+(\Omega, \mathcal{T}), \ \varphi \leq f \right\}.$$

Autrement dit,

$$\int_\Omega f d\mu = \sup \left\{ \int \varphi d\mu, \quad \varphi \in \mathcal{E}_+(\Omega, \mathcal{T}), \ \varphi \leq f \right\}.$$

Plus généralement, si $A \in \mathcal{T}$, on pose $\int_A f d\mu = \int_\Omega f \mathbb{1}_A d\mu$.

**Mise en garde.**

Bien distinguer le fait que $\int_\Omega f d\mu$ a toujours un sens dans $[0, +\infty]$ et le fait que $\int_\Omega f d\mu$ est finie, c'est à dire $\int_\Omega f d\mu \in [0, +\infty[$. D'où la définition suivante :

**Définition 5.**

Soit $f \in \overline{\mathfrak{L}}_+(\Omega, \mathcal{T})$. On dit que $f$ est $\mu$-intégrable sur $\Omega$ (ou simplement intégrable quand il n'y a pas de risque de confusion) si l'intégrale $\int_\Omega f d\mu$ est finie.

**Exemple 3.** La fonction $\mathbb{1}_\mathbb{R}$ est $\delta_0$-intégrable sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas $\lambda$-intégrable sur $\mathbb{R}$.

## 3.5 Principaux théorèmes d'intégration de fonctions positives

Le développement de la théorie de l'intégration sur $\overline{\mathfrak{L}}_+(\Omega, \mathcal{T})$ repose sur un important théorème de convergence des intégrales, propre aux suites croissantes d'éléments de $\overline{\mathfrak{L}}_+(\Omega, \mathcal{T})$, qui permet sous un minimum d'hypothèses de commuter "intégration" et "passage à la limite".

**Théorème 2 (Théorème de convergence monotone ou de Beppo-Levi).**

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions de $\overline{\mathfrak{L}}_+(\Omega, \mathcal{T})$ qui tend $\mu$-p.p vers une fonction $f$, alors

1. $f \in \overline{\mathfrak{L}}_+(\Omega, \mathcal{T})$,
2. La suite $\left(\int f_n \, d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en croissant vers $\int f \, d\mu$.

**Cas particulier :**

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles de $\mathcal{T}$, telle que $A_n \subset A_{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right).$$

En effet, la fonction indicatrice $\mathbb{1}_{A_n}$ est mesurable, positive, croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_{\bigcup\limits_n A_n}$.

D'après le théorème de Beppo-Lévi : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_\Omega \mathbb{1}_{A_n} d\mu = \int_\Omega \mathbb{1}_{\bigcup\limits_n A_n} d\mu$.

Puisque $\int_\Omega \mathbb{1}_{A_n} d\mu = \mu(A_n)$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup\limits_n A_n\right)$.

**Propriétés 4** (Propriétés de l'intégrale de fonctions positives).

Soient $f$ et $g$ deux fonctions mesurables et positives sur $\Omega$. Soient $A$ et $B$ deux ensembles mesurables. $\alpha \in [0, +\infty]$.

1. $\displaystyle\int_\Omega (\alpha f)\, d\mu = \alpha \int_\Omega f d\mu$ (Homogénéité positive).
2. $\displaystyle\int_\Omega (f+g)\, d\mu = \int_\Omega f d\mu + \int_\Omega g d\mu$ (Additivité).
3. $\displaystyle f \leq g \Longrightarrow \int f d\mu \leq \int g d\mu$ (Croissance de l'intégrale).
4. $\displaystyle A \subset B \Longrightarrow \int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu.$
5. Soit $(A_i)_i$ une famille d'ensembles mesurables et disjoints deux à deux, alors
$$\int_{\bigcup\limits_{i\geq 1} A_i} f\ d\mu = \sum_{i\geq 1} \int_{A_i} f d\mu.$$
6. Si $N$ est $\mu$-négligeable alors $\displaystyle\int_N f d\mu = 0$ et $\displaystyle\int_{\Omega\setminus N} f d\mu = \int_\Omega f d\mu.$
7. $f = 0$ $\mu$-p.p si et seulement si $\displaystyle\int_\Omega f d\mu = 0.$
8. Si $f \in \overline{\mathfrak{L}}_+(X, \mathcal{T})$ et si $\displaystyle\int_\Omega f d\mu < +\infty$, alors $\{x \in \Omega, \quad f(x) = +\infty\}$ est $\mu$-négligeable.

**Démonstration .** $f, g \in \overline{\mathfrak{L}}_+(\Omega, \mathcal{T})$, donc d'après le théorème (2), il existe $(\varphi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$ dans $\mathcal{E}_+(\Omega, \mathcal{T})$ telles que $\varphi_n \nearrow_n f$ et $\psi_n \nearrow_n g$.

1. $\displaystyle\alpha\varphi_n \nearrow_n \alpha f \quad \Rightarrow \quad \int_\Omega (\alpha f)\, d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \alpha\varphi_n d\mu$, et puisque $\varphi_n \in \mathcal{E}_+(\Omega, \mathcal{T})$ alors
$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \alpha\varphi_n d\mu = \lim_{n\to+\infty} \alpha \int_\Omega \varphi_n d\mu = \alpha \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \varphi_n d\mu = \alpha \int_\Omega f d\mu;$$

2. $\varphi_n + \psi_n \nearrow_n f + g$
$$\Rightarrow \int_\Omega (f+g)\, d\mu = \lim_n \int_\Omega (\varphi_n + \psi_n)\, d\mu = \lim_n \left[\int_\Omega \varphi_n d\mu + \int_\Omega \psi_n d\mu\right] \quad \text{car } \varphi_n, \psi_n \in \mathcal{E}_+(\Omega, \mathcal{T})$$
$$\Rightarrow \int_\Omega (f+g)\, d\mu = \lim_n \int_\Omega \varphi_n d\mu + \lim_n \int_\Omega \psi_n d\mu = \int_\Omega f d\mu + \int_\Omega g d\mu$$

3. La croissance. Soient $f$ et $g$ deux fonctions mesurables et positives. On a

$$\int f d\mu = \sup\left\{\int \varphi d\mu, \quad \varphi \in \mathcal{E}_+(\Omega, \mathcal{T}),\ \varphi \leq f\right\}$$

$$\int g d\mu = \sup\left\{\int \varphi d\mu, \quad \varphi \in \mathcal{E}_+(\Omega, \mathcal{T}),\ \varphi \leq g\right\}$$

Si on suppose que $f \leq g$ alors on a

$$\left\{\int \varphi d\mu, \quad \varphi \in \mathcal{E}_+(\Omega, \mathcal{T}),\ \varphi \leq f\right\} \subset \left\{\int \varphi d\mu, \quad \varphi \in \mathcal{E}_+(\Omega, \mathcal{T}),\ \varphi \leq g\right\}$$

Par passage au sup, on obtient

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu.$$

4. Soient $A$ et $B$ deux ensembles mesurables donc $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$ sont deux fonctions mesurables et positives. Puisque $A \subset B$ alors $\mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$. Donc $\mathbb{1}_A f \leq \mathbb{1}_B f$.

   Par croissance de l'intégrale, on obtient $\displaystyle\int \mathbb{1}_A f d\mu \leq \int \mathbb{1}_B f d\mu$. Donc

$$\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu.$$

5. $\displaystyle\int_{\bigcup\limits_{i\geq 1} A_i} f\ d\mu = \int_\Omega f \mathbf{1}_{\bigcup\limits_{i\geq 1} A_i}\ d\mu$. Comme les ensembles $A_i$ sont mesurables et disjoints deux à deux alors $\mathbf{1}_{\bigcup\limits_{i\geq 1} A_i} = \displaystyle\sum_{i\geq 1} \mathbf{1}_{A_i}$. Donc

$$\int_\Omega f \mathbf{1}_{\bigcup\limits_{i\geq 1} A_i}\ d\mu = \int_\Omega \left(\sum_{i\geq 1} f \mathbf{1}_{A_i}\right) d\mu$$

   Et comme $\displaystyle\int_\Omega \left(\sum_{i\geq 1} f \mathbf{1}_{A_i}\right) d\mu = \sum_{i\geq 1}\left(\int_\Omega f \mathbf{1}_{A_i}\right)$ d'après le lemme de Fatou (3.4) alors

$$\int_{\bigcup\limits_{i\geq 1} A_i} f\ d\mu = \sum_{i\geq 1}\left(\int_\Omega f \mathbf{1}_{A_i}\right) = \sum_{i\geq 1}\left(\int_{A_i} f\right).$$

6. Par la propriété de la croissance, $f \leq \sup\limits_\Omega f \Rightarrow \displaystyle\int_N f d\mu \leq \int_N \left(\sup_\Omega f\right) d\mu$. De plus

$$\int_N \left(\sup_\Omega f\right) d\mu = \sup_\Omega f \times \int_N d\mu = \sup_\Omega f \times \mu(N).$$

   $N$ est $\mu$-négligeable donc $\mu(N) = 0$, ainsi $\sup\limits_\Omega f \times \mu(N) = 0$.

Même si $\sup_\Omega f = +\infty$, on a par covnetion $+\infty(N) = 0$ si $\mu(N) = 0$.

On démontre l'autre égalité en remarquant que $f = \mathbb{1}_N f + \mathbb{1}_{\Omega\setminus N} f$ et en appliquant la propriété de linéarité.

7. • Supposons que $f = 0$ $\mu$-p.p. Soit $A = \{x \in \Omega,\ f(x) > 0\} = f^{-1}(]0;+\infty[)$. Donc $A \in \mathcal{T}$ et par hypothèse, $A$ est $\mu$-négligeable. Considérons la fonction $g$ définie sur $\Omega$ par

$$g(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \ x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$g \in \overline{\mathfrak{L}}_+(\Omega, \mathcal{T})$, $g \geq f$ donc par croissance, $\displaystyle\int_\Omega g d\mu \geq \int_\Omega f d\mu$.

En appliquant le théorème de Beppo-Lévi à la suite de fonctions mesurables positive et croissante $(n\mathbb{1}_A)_n$,

$$g = \lim_n (n\mathbb{1}_A) \quad \Rightarrow \quad \int g d\mu = \lim_n \int n\mathbb{1}_A d\mu = \lim_n n\mu(A) = 0.$$

Finalement, de $\displaystyle\int_\Omega g d\mu \geq \int_\Omega f d\mu \geq 0$ et $\int g d\mu$, on déduit que $\int f d\mu = 0$.

• Supposons que $\int f d\mu = 0$. Comme $f$ est $(\mathcal{T}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$-mesurable, alors

$$\{x \in \Omega,\ f(x) > 0\} = f^{-1}\left(]0, +\infty[\right) \in \mathcal{T}.$$

D'autre part, on a

$$\{x \in \Omega,\ f(x) > 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left\{x,\ f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}$$

On pose $A_n = \left\{x,\ f(x) \geq \dfrac{1}{n}\right\}$, donc $f \geq \dfrac{1}{n}\mathbb{1}_{A_n}$, $\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

D'après la propriété de croissance de l'intégrale, $\displaystyle\int_\Omega f d\mu \geq \int_\Omega \left(\frac{1}{n}\mathbb{1}_{A_n}\right) d\mu$.

De plus $\displaystyle\int \left(\frac{1}{n}\mathbb{1}_{A_n}\right) d\mu = \frac{1}{n}\mu(A_n)$ et $0 \geq \dfrac{1}{n}\mu(A_n) \geq 0$, ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mu(A_n) = 0$ donc l'ensemble $\{x \in \Omega,\ f(x) > 0\}$ est réunion dénombrable d'ensembles $\mu$-négligeables, donc il est $\mu$-négligeable.

Conclusion. $\{x \in \Omega,\ f(x) > 0\}$ est $\mu$-négligeable donc $f = 0$ $\mu$-p.p.

8. Soit $A = \{x \in \Omega, \ \ f(x) = +\infty\}$, $A \in \mathcal{T}$ car $A = f^{-1}\left(\{+\infty\}\right)$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f \geq n\mathbb{1}_A \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \displaystyle\int_\Omega f d\mu \geq n\mu(A) \Rightarrow 0 \leq \mu(A) \leq \frac{1}{n}\int_\Omega f d\mu \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$\displaystyle\int_\Omega f d\mu < +\infty$ donc $\mu(A) = 0$.

En l'absence de l'hypothèse de croissance sur la suite de fonctions de $\overline{\mathfrak{L}}_+(\Omega, \mathcal{T})$, on a tout de même le résultat partiel suivant :

**Corollaire 2** (Lemme de Fatou)**.**

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\overline{\mathcal{L}}_+(\Omega, \mathcal{T})$ alors

$$\int \liminf f_n d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu.$$

**Démonstration .** Pour tout $x \in \Omega$, on note pour $p \in \mathbb{N}$, $g_p(x) = \inf_{n \geq p} f_n(x)$. On a

$$(\liminf f_n)(x) = \liminf f_n(x) = \sup_{p \in \mathbb{N}} [\inf_{n \geq p} f_n(x)] = \sup_p [g_p(x)]$$

- $\forall p \in \mathbb{N}$, $g_p \leq g_{p+1}$ et $g_p \geq 0$ donc $\lim_{p \to +\infty} [g_p(x)] = \sup_{p \in \mathbb{N}} [g_p(x)]$ et d'après le théorème de la convergence monotone, on a

$$\lim_{p \to +\infty} \int_\Omega g_p d\mu = \int_\Omega \lim_{p \to +\infty} g_p d\mu = \int_\Omega (\liminf f_n) d\mu. \tag{3.4}$$

- D'autre part, on a pour tout entier $p$, $g_p = \inf_{n \geq p} f_n$, donc

$$\forall n \geq p, \quad g_p \leq f_n.$$

Par la propriété de la croissance de l'intégrale, on obtient pour tout entier $p$ et tout entier $n$ tel que $n \geq p$

$$\int g_p d\mu \leq \int f_n d\mu.$$

Ceci étant vrai pour tout entier $n$ supérieur à l'entier $p$, on en déduit par passage à la borne inférieure que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \int g_p d\mu \leq \inf_{n \geq p} \int f_n d\mu$$

Ainsi

$$\sup_{p \in \mathbb{N}} \int g_p d\mu \leq \sup_{p \in \mathbb{N}} \inf_{n \geq p} \int f_n d\mu. \tag{3.5}$$

Comme $(g_p)_p$ est croissante, la propriété de la croissance de l'intégrale nous permet de déduire que $\left(\int g_p d\mu\right)_p$ est croissante et que $\lim_{p \to +\infty} \int g_p d\mu = \sup_{p \in \mathbb{N}} \int g_p d\mu$. De (3.4) et (3.5), on déduit que

$$\lim_{p \to +\infty} \int g_p d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu.$$

Les séries de fonctions sont d'utilisation courante, il est utile de donner l'expression du théorème de la convergence monotone dans ce cas.

**Théorème 3** (intégration d'une série de fonctions de $\overline{\mathfrak{L}}_+(\Omega, \mathcal{T})$)**.**

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\overline{\mathfrak{L}}_+(\Omega, \mathcal{T})$. Alors

1. $\displaystyle\int_\Omega \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_\Omega f_n d\mu\right)$ ;
2. Si $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_\Omega f_n d\mu\right) < +\infty$ alors il existe un ensemble $N$ mesurable et $\mu$-négligeable tel que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n < +\infty$ sur $\Omega \backslash N$.

En pratique, on utilisera souvent des intégrales par rapport à la mesure de Lebesgue, les théorèmes suivants expriment des cas où on peut se ramener à un calcul d'intégrale au sens de Riemann. Les propriétés suivantes seront valables pour des fonctions mesurables positives ou de signe quelconque.

**Théorème 4.**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable.

1. Si $f$ est Riemann intégrable, alors $f$ est Lebesgue intégrable et les intégrales sont égales, autrement dit
$$\int_{[a,b]} f\, d\lambda = \int_a^b f(x)\, dx$$
2. Si $f$ est bornée alors $f$ est Riemann intégrable ssi
$$\lambda\left(\{x \in ]a, b[ \text{ tel que } f \text{ n'est pas continue en } x\}\right) = 0,$$
autrement dit, si et seulement si l'ensemble des points de discontinuités de $f$ dans $]a, b[$ est de mesure de Lebesgue nulle.

**Corollaire 3.**

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction mesurable et Riemann intégrable sur tout intervalle $[0, n]$, $n \in \mathbb{N}$.
$f$ est Lebesgue intégrable sur $[0, +\infty[$ ssi $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^n |f(x)|\, dx < +\infty$.
Dans ce cas, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, dx = \int_{[0,+\infty[} f\, d\lambda$.

# 4 | Intégration de fonctions mesurables

Dans tout ce chapitre, $\Omega$ désigne un ensemble quelconque non vide, $\mathcal{T}$ une tribu de parties de $\Omega$ et $\mu$ une mesure positive sur $\mathcal{T}$. Dans la suite de ce cours, on considère l'espace mesuré $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$.

## Sommaire



On présentera les théorèmes fondamentaux d'intégration au sens de Lebesgue de fonctions mesurables positives ou de signe quelconque. On s'intéressera à la définition de nouvelles mesures à partir d'autres mesures. Ces mesures ont une grande importance dans l'articulation du cours de probabilité.

## 4.1 Intégration de fonctions réelles

On étend la notion d'intégrale et d'intégrabilité aux fonctions réelles mesurables de signe quelconque en se basant sur les définitions et les propriétés de fonctions mesurables et positives. Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable. On note

$$\boxed{\mathfrak{L}(\Omega, \mathcal{T}) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}, \left(\mathcal{T}, \mathfrak{B}\left(\mathbb{R}\right)\right)\text{-mesurables.} \right\}}$$

**Définition 1.**

Une fonction $f$ de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$ est dite $\mu$-intégrable si $f$ est $(\mathcal{T}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$-mesurable et

$$\int f^+ d\mu < +\infty \text{ et } \int f^- d\mu < +\infty.$$

**Définition 2.**

Si $f$ est $\mu$-intégrable. On appelle intégrale de $f$, notée $\int f d\mu$ ou $\int_\Omega f d\mu$ ou $\int_\Omega f(x)d\mu(x)$ le nombre

$$\int_\Omega f^+ d\mu \;-\; \int_\Omega f^- d\mu.$$

On note $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ (ou en abrégé $\mathcal{L}^1$) l'ensemble des fonctions $\mu$-intégrables.

**Théorème 1.**

1. Si $f \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{T})$, on a l'équivalence suivante

$$f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu) \Longleftrightarrow \int |f|\, d\mu < +\infty$$

2. Si $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$, alors $\left|\int f d\mu\right| \leq \int |f|\, d\mu$.

**Démonstration .**

1. $\rightsquigarrow$ Soit $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$, donc $\int f^+ d\mu < +\infty$ et $\int f^- d\mu < +\infty$. Comme $\mid f \mid = f^+ + f^-$ alors par la propriété de l'additivité des intégrales de fonctions mesurables et positives

$$\int \mid f \mid d\mu = \underbrace{\int f^+ d\mu}_{<+\infty} + \underbrace{\int f^- d\mu}_{<+\infty}.$$

Il s'en suit que $\int \mid f \mid d\mu < +\infty$.

$\rightsquigarrow$ Réciproquement, on a $0 \leq f^+ \leq |f|$ et $0 \leq f^- \leq |f|$. D'après la propriété de la croissance de l'intégrale,

$$\int f^+ d\mu < \int |f|\, d\mu < +\infty \quad \text{et} \quad \int f^- d\mu < \int |f|\, d\mu < +\infty.$$

La fonction $f$ est donc $\mu$-intégrable.

2. $\left|\int f d\mu\right| = \left|\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu\right|$. Comme $\left|\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu\right| \leq \left|\int f^+ d\mu\right| + \left|\int f^- d\mu\right|$ et que $\int f^+ d\mu + \int f^- d\mu = \int |f|\, d\mu$ alors $\left|\int f d\mu\right| \leq \int |f|\, d\mu$.

## 4.2 Propriétés de l'intégrale de fonctions réelles

**Corollaire 4.**

Soient $f \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{T})$ et $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$. Si $\mid f \mid \leq \mid g \mid$ $\mu$-p.p alors

$$f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu) \quad \text{et} \quad \int \mid f \mid d\mu \leq \int \mid g \mid d\mu.$$

**Démonstration .** Par hypothèse, il existe $N \in \mathcal{T}$, $N$ est $\mu$-négligeable tel que $\forall x \in \Omega \backslash N$,

$$|f(x)| \leq |g(x)|.$$

D'après les propriétés de l'intégrale de fonctions mesurables et positives,

$$\int_\Omega |f|\, d\mu = \int_{\Omega\backslash N} |f|\, d\mu = \int_\Omega \mathbb{1}_{\Omega\backslash N} |f|\, d\mu. \tag{4.1}$$

Par la croissance de l'intégrale de fonctions mesurables et positives,

$$\int_\Omega \mathbb{1}_{\Omega\backslash N} |f|\, d\mu \leq \int_\Omega \mathbb{1}_{\Omega\backslash N} |g|\, d\mu \tag{4.2}$$

et comme

$$\int_\Omega \mathbb{1}_{\Omega\backslash N} |g|\, d\mu = \int_\Omega |g|\, d\mu$$

alors les relations (4.1) et (4.2) impliquent que $\displaystyle\int_\Omega |f|\, d\mu \leq \int_\Omega |g|\, d\mu$.
Si $g \in \mathcal{L}^1$ alors $\displaystyle\int |g|\, d\mu < +\infty \Rightarrow \int |f|\, d\mu < +\infty$. On en déduit que

$$f \in \mathcal{L}^1 \quad \text{et} \quad \int |f|\, d\mu \leq \int |g|\, d\mu.$$

**Notation.**

Pour $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ et $A \in \mathcal{T}$, on note $\displaystyle\int_A f d\mu = \int \mathbb{1}_A f d\mu$ car d'après le corollaire (4), si $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ alors $\mathbb{1}_A f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$.

**Théorème 2.**

1. Soient $f$ et $g$ deux fonctions de $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors
   (a) $\displaystyle\int (\alpha f)\, d\mu = \alpha \int f d\mu\,;$
   (b) $\displaystyle\int (f+g)\, d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu\,;$
   (c) $\displaystyle f \leq g \Rightarrow \int f d\mu \leq \int g d\mu.$
2. $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ est un espace vectoriel réel.

**Démonstration .**

1. Si $f$ est $\mu$-intégrable alors $\displaystyle\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega f^+ d\mu - \int_\Omega f^- d\mu$. Comme

$$(-f) = (-f)^+ - (-f)^-, \quad (-f)^+ = f^- \quad \text{et} \quad (-f)^- = f^+$$

alors

$$\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega (-f)^- d\mu - \int_\Omega (-f)^+ d\mu = -\left(\int_\Omega (-f)^+ d\mu - \int_\Omega (-f)^- d\mu\right) = -\int_\Omega (-f) d\mu.$$

   (a) On distingue le cas où $\alpha \geq 0$ et le cas $\alpha \leq 0$ puis on applique les propriétés de l'intégrale de fonctions mesurables et positives.

   (b) On pose $(f+g) = (f+g)^+ - (f+g)^- = (f)^+ + (g)^+ - (f)^- - g^-$.

$$\int_\Omega (f+g) d\mu = \int_\Omega (f+g)^+ d\mu - \int_\Omega (f+g)^- d\mu = \int_\Omega (f)^+ d\mu + \int_\Omega (g)^+ d\mu - \left(\int_\Omega (f)^- d\mu + \int_\Omega (g)^- d\mu\right)$$

   La commutativité nous permet d'écrire

$$\int_\Omega (f+g) d\mu = \underbrace{\left(\int_\Omega (f)^+ d\mu - \int_\Omega (f)^- d\mu\right)}_{=\int_\Omega f d\mu} + \underbrace{\left(\int_\Omega (g)^+ d\mu - \int_\Omega (g)^- d\mu\right)}_{=\int_\Omega g d\mu}.$$

   (c) Comme $g = \underbrace{(g-f)}_{\geq 0} + f$, on applique la propriété précédente (linéarité) et on obtient $\displaystyle\int_\Omega g d\mu = \underbrace{\int_\Omega (g-f)\, d\mu}_{\geq 0} + \int_\Omega f d\mu$. Le résultat est immédiat.

2. Il est aisé de montrer que $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathcal{T}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ pour en déduire que $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ est espace vectoriel réel.

**Corollaire 5.**

Si $f \in \mathcal{L}^1$ et si $N \in \mathcal{T}$ est $\mu$-négligeable alors

$$\int_N f d\mu = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\Omega \setminus N} f d\mu = \int_\Omega f d\mu.$$

**Théorème 3** (Théorème de la convergence dominée)**.**

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{L}(\Omega, \mathcal{T})$ et $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$. On suppose que

- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f$ $\mu$-p.p
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$.

Alors

$$\begin{cases} f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu) \\ \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int f_n d\mu = \int f d\mu \end{cases}$$

**Théorème 4.**

Soit $f \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{T})$. Il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{E}(\Omega, \mathcal{T})$ qui converge simplement vers $f$ sur $\Omega$. Si de plus, $f$ est bornée, alors $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f$ sur $\Omega$.

**Démonstration .** $f = f^+ - f^-$ et d'après le théorème 1 du chapitre 6,

- il existe une suite $\psi_n \in \mathcal{E}^+(\Omega, \mathcal{T})$ avec $\psi_n \nearrow f^+$,
- il existe une suite $\varphi_n \in \mathcal{E}^+(\Omega, \mathcal{T})$ avec $\varphi_n \nearrow f^-$.

Posons $\Phi_n = \psi_n - \varphi_n$ $\Phi_n \in \mathcal{E}(\Omega, \mathcal{T})$ et $\forall x \in \Omega$

$$\lim_n \Phi_n(x) = f^+(x) - f^-(x) = f(x).$$

Si $f$ est bornée, $f^+$ et $f^-$ sont bornées donc

- $\psi_n$ converge uniformément vers $f^+$ ;
- $\varphi_n$ converge uniformément vers $f^-$ ;

donc $\Phi_n$ converge uniformément vers $f^+ - f^- = f$.

## 4.3 Mesures à densité - Théorème de Radon-Nikodym

L'objectif est de construire des mesures à partir de mesures connues ou de "transporter" une mesure d'un espace à un autre. En particulier sur $\big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$, nous n'avons construit que la mesure de Lebesgue $\lambda$.

En théorie de l'intégration, le théorème de Radon-Nykodym est un théorème très important qui aura des répercussions du côté des probabilités notamment en probabilité conditionnelle. Ce théorème aura sa place importante en analyse fonctionnelle par rapport à la dualité des espaces $L^p$. C'est un théorème de décomposition. Étant données deux mesures $\lambda$ et $\mu$, on va essayer de relier l'une à l'autre par la décomposition :

$$\lambda = \lambda_a + \lambda_s.$$

- La mesure $\lambda_a$ est une mesure absolument continue par rapport à $\mu$, autrement dit si la mesure d'un ensemble mesurable par $\mu$ est nulle alors la mesure de cet ensemble par $\lambda_a$ est nulle.
- La mesure $\lambda_s$ est une mesure qu'on appellera mesure étrangère, autrement dit $\lambda_s$ charge un ensemble qui est disjoint de l'ensemble chargé par $\mu$ ce qui veut encore dire que dès qu'un ensemble est mesuré par $\mu$ alors il est de mesure nulle par $\lambda_s$.

### 4.3.1 Mesure définie par une densité

**Proposition 10.**

Si $f$ est une fonction positive mesurable, la fonction d'ensemble positive $\nu : \mathcal{T} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ définie pour tout $\mathcal{A} \in \mathcal{T}$ par

$$\nu(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} f d\mu = \int_{\Omega} \mathbf{1}_{\mathcal{A}} f d\mu.$$

définit une nouvelle mesure sur $(\Omega, \mathcal{T})$. La fonction $f$ s'appelle la densité de $\nu$ par rapport à $\mu$, et la mesure $\nu$ est aussi notée $\nu = f \bullet \mu$. On note également $f = \dfrac{d\nu}{d\mu}$.

**Démonstration .** $\nu$ est une fonction d'ensembles positive.

1. $\nu(\emptyset) = \displaystyle\int_{\emptyset} f d\mu = \int_{\emptyset} \mathbf{1}_A f d\mu = 0.$

2. Soit $\big(A_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'ensembles mesurables et disjoints deux à deux.

$$\nu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \int_{\Omega} \mathbf{1}_{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n} f d\mu = \int_{\Omega} \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{A_n} f\Big) d\mu. \tag{4.3}$$

Puisque la fonction $\mathbf{1}_{A_n} f$ est mesurable et positive alors d'après le théorème d'intégration d'une série de fonctions mesurables positives, on peut écrire

$$\int_\Omega \Big( \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{A_n} f \Big) d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \Big( \int_\Omega \mathbf{1}_{A_n} f d\mu \Big). \tag{4.4}$$

Des égalités (4.3) et (4.4), on déduit

$$\boxed{\nu\Big( \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n).}$$

$\nu$ définit donc bien une mesure sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

**Remarque 3.**

1. Si $f_1 = f_2$ $\mu-$p.p alors $\forall A \in \mathcal{T}$, $\displaystyle\int_A f_1 d\mu = \int_A f_2 d\mu$ ainsi $\nu$ est définie par une classe d'équivalence de densités, égales $\mu-$p.p.

2. Si $f$ est $\mu$-intégrable, on peut de cette façon engendrer une probabilité sur $\big(\Omega, \mathcal{A}\big)$ en écrivant : $\forall A \in \mathcal{A}$, $\quad \mathbf{P}(A) = \dfrac{\displaystyle\int_A f d\mu}{\displaystyle\int_\Omega f d\mu}$.

**Exemple 1.**

1. La mesure sur $\mathbb{R}$ de densité $g(x) = \theta e^{-\theta x} \mathbf{1}_{[0;+\infty[}(x)$ s'appelle la loi de probabilité exponentielle de paramètre $\theta$ : c'est une mesure de probabilité (une mesure de masse totale égale à 1 puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} \theta e^{-\theta x} dx = 1$). Plus généralement, toute mesure sur $\mathbb{R}$ de densité $g$ vérifiant $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = 1$ est une mesure de probabilité.
2. On considère des mesures définies par des densités par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$, comme :

$$\begin{aligned} \text{La densité de Cauchy} \quad &: \quad f(x) &= \frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}, \\ \text{La densité de Gauss} \quad &: \quad f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \\ \text{La densité exponentielle} \quad &: \quad f(x) &= \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+(x)}. \end{aligned}$$

**Définition 3.**

Soient $\mu$ et $\nu$ deux mesures sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{T})$. On dit que :

1. $\nu$ est absolument continue par rapport à $\mu$ et on note $\nu \ll \mu$ si :

$$\forall \mathcal{A} \in \mathcal{T}, \quad \mu(\mathcal{A}) = 0 \Rightarrow \nu(\mathcal{A}) = 0.$$

2. $\nu$ est étrangère à $\mu$ et on note $\nu \perp \mu$ s'il existe $\mathcal{A} \in \mathcal{T}$ tel que $\mu(\mathcal{A}) = 0$ et $\nu(\mathcal{A}^c) = 0$.

**Théorème 5.**

Soit $f : (\Omega, \mathcal{T}) \to \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$. La mesure $\nu$ de densité $f$ par rapport à la mesure $\mu$ est absolument continue par rapport à $\mu$.

**Démonstration .** Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{T}$ tel que $\mu(\mathcal{A}) = 0$. D'après les propriétés de l'intégrale de fonctions positives,

$$\int_{\mathcal{A}} f d\mu = 0$$

Ainsi $\nu(\mathcal{A}) = 0$.

**Théorème 6.**

Soient $f : (\Omega, \mathcal{T}) \to \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$ une fonction mesurable et positive et $\nu$ une mesure de densité $f$ par rapport à $\mu$. Soit $g : (\Omega, \mathcal{T}) \to \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$ une fonction mesurable ; on a alors la propriété suivante :

$$\boxed{\int_\Omega g d\nu = \int_\Omega g f d\mu.}$$

**$g$ est $\nu$-intégrable si et seulement si $gf$ est $\mu$-intégrable.**

**Démonstration .** $g$ et $fg$ sont mesurables donc leur intégrales existent. On distingue 4 cas :

1. Si $g = \mathbf{1}_A$, $A \in \mathcal{T}$,

$$\int_\Omega g d\nu = \int_\Omega \mathbf{1}_A d\nu = \nu(A) = \int_A f d\mu = \int_\Omega \mathbf{1}_A f d\mu = \int_\Omega f g d\mu.$$

Donc $\displaystyle\int_\Omega g d\nu < +\infty$ si et seulement si $\displaystyle\int_\Omega f g d\mu < +\infty$.

2. Si $g \in \mathcal{E}^+$ alors $g = \sum a_i \mathbf{1}_{A_i}$, $A_i \in \mathcal{T}$.

$$\int_\Omega g d\nu = \sum a_i \nu(A_i) = \sum a_i \left( \int_{A_i} f d\mu \right) = \int_\Omega \sum a_i \mathbf{1}_{A_i} f d\mu = \int_\Omega f g d\mu.$$

Donc $\int_\Omega g d\nu < +\infty$ si et seulement si $\int_\Omega f g d\mu < +\infty$.

3. Si $g \in \mathcal{M}^+$ alors $g$ est une limite simple d'une suite croissante de fonctions mesurables et positives. $g = \lim_{n\to+\infty} \uparrow g_n$, $g_n \in \mathcal{E}^+$.

$$\int_\Omega g d\nu = \int_\Omega \lim_{n\to+\infty} \uparrow g_n d\nu = \underbrace{\lim_{n\to+\infty} \uparrow \int_\Omega g_n d\nu}_{\text{Beppo-Levi}} = \lim_{n\to+\infty} \uparrow \int_\Omega f g_n d\mu = \underbrace{\int_\Omega \lim_{n\to+\infty} \uparrow f g_n d\nu}_{\text{Beppo-Levi}} = \int_\Omega f g d\mu.$$

Donc $\int_\Omega g d\nu < +\infty$ si et seulement si $\int_\Omega f g d\mu < +\infty$.

4. Si $g = g^+ - g^-$.

$$g \text{ est } \nu\text{−intégrable} \Leftrightarrow \begin{cases} \int_\Omega g^+ d\nu < +\infty \\ \int_\Omega g^- d\nu < +\infty \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int_\Omega f g^+ d\mu < +\infty \\ \int_\Omega f g^- d\mu < +\infty \end{cases} \Leftrightarrow f g \text{ est } \mu\text{−intégrable}$$

et

$$\int_\Omega g d\nu = \int_\Omega g^+ d\nu - \int_\Omega g^- d\nu = \int_\Omega f g^+ d\mu - \int_\Omega f g^- d\mu = \int_\Omega f g d\mu.$$

## 4.4 Espaces $\mathcal{L}^p$ et $L^p$

**Définition 1.**

Soit $p \in [1, +\infty[$, on note $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{T}, \mu)$ (en abrégé $\mathcal{L}^p$), l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{L}(X, \mathcal{T})$ tel que $|f|^p \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{T}, \mu)$ :

$$f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{T}, \mu) \Leftrightarrow f \in \mathcal{L}(X, \mathcal{T}) \quad \text{et} \quad \int_X |f|^p d\mu < +\infty.$$

On dit que $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{T}, \mu)$ est de **puissance $p^{\text{ième}}$-intégrable**.

**Remarque 4.**

1. La fonction $|f|^p$ désigne la fonction $x \longmapsto (|f(x)|)^p$ (ce n'est pas la composée.)

2. Pour $p = 1$, on obtient les fonctions $\mu$-intégrables.
   Pour $p = 2$, on obtient les fonctions de carré intégrables.

3. Si $f \in \mathcal{L}(X, \mathcal{T})$ alors $|f|^p \in \mathcal{L}(X, \mathcal{T})$.

**Propriété 4.4.1.** $\mathcal{L}^p\left(X,\mathcal{T},\mu\right)$ est un espace vectoriel.

**Démonstration .** On montre que $\mathcal{L}^p\left(X,\mathcal{T},\mu\right)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}\left(X,\mathcal{T}\right)$.

- $\mathcal{L}^p\left(X,\mathcal{T},\mu\right) \subset \mathcal{L}\left(X,\mathcal{T}\right)$ (par définition) ;
- $0 \in \mathcal{L}^p$ donc $\mathcal{L}^p \neq \emptyset$ ;
- soient $f \in \mathcal{L}^p$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ donc $\alpha f \in \mathcal{L}\left(X,\mathcal{T}\right)$ et

$$\int |\alpha f|^p \, d\mu = \int |\ \alpha\ |^p \, |f|^p \, d\mu = |\ \alpha\ |^p \underbrace{\int |f|^p \, d\mu}_{<+\infty \text{ car } f\in\mathcal{L}^p} < +\infty$$

  donc $\alpha f \in \mathcal{L}^p$ ;
- Soit $(f,g) \in \mathcal{L}^p \times \mathcal{L}^p$ alors $f+g \in \mathcal{L}\left(X,\mathcal{T}\right)$.
  $\forall x \in X,\ |f(x)+g(x)| \leq 2\max\left(|f(x)|,|g(x)|\right)$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow |f(x)+g(x)|^p &\leq 2^p\Big(\max\left(|f(x)|,|g(x)|\right)\Big)^p \\
\Rightarrow \int |f+g| \, d\mu &\leq 2^p \int \sup\Big(|f|^p, |g|^p\Big) d\mu \\
&\leq 2^p \int \Big(|f|^p + |g|^p\Big) d\mu \\
&\leq 2^p \left(\int |f|^p \, d\mu + \int |g|^p \, d\mu\right)
\end{aligned}$$

## Notation

$$\mathcal{N} = \{f \in \mathcal{L}(X,T),\quad f = 0 \ \ \mu\text{ -p.p}\}.$$

**Proposition 11.**

$\mathcal{N}$ est un espace vectoriel réel et pour tout $p \in [1,+\infty[$, $\mathcal{N} \subset \mathcal{L}^p$.

**Remarque 5.** Pour $f \in \mathcal{L}(X,T)$ et $g \in \mathcal{L}(X,T)$, $f-g \in \mathcal{N} \Leftrightarrow f = g \ \ \mu$ p.p.

**Définition 2.**

$L^p(X,T,\mu)$ (ou en abrégé $L^p$) est l'espace vectoriel quotient de $\mathcal{L}^p(X,T,\mu)$ par $\mathcal{N}$. C'est à dire l'ensemble des classes d'équivalence d'éléments de $L^p$ par la relation $f = g$ $\mu$-p.p.

**Remarque 6.** Bien que ses éléments soient des classes d'équivalence des fonctions. On a l'habitude de dire qu'un élément de $L^p(X,T,\mu)$ est une fonction, bien que strictement il s'agisse d'une classe de fonctions.

$$f \in L^p(X,\mathcal{T},\mu) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists g \in \mathcal{L}(X,\mathcal{T},\mu) \\ \\ f \;=\; g \quad \mu p.p \\ \\ \displaystyle\int_X |g|^p \, d\mu < +\infty. \end{array} \right\}$$

**Exemple 11.**

1. On considère l'espace probabilisé $(X, \mathcal{P}(X), \mathbf{P})$. La loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, $p \in ]0,1[$, modélise le nombre de succès dans une répétition indépendante de $n$ expériences aléatoires identiques où la probabilité de succès de chaque expérience est égale à $p$.

   $\mathbf{P}$ la mesure de probabilité telle que si $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$

   $$\mathbf{P}\big(\{k\}\big) = \mathbf{P}\,(\text{nombre de sucès} = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

   - Si $X = \{0, 1, \ldots, n\}$ alors le plus gros ensemble $\mathbf{P}$-négligeable est l'ensemble vide.
   - Si $X = \mathbb{N}$ et si $P(k) = 0$ pour $k \geq n$ alors $N = \{n+1, \ldots\}$ est le plus gros ensemble $\mathbf{P}$-négligeable.

2. Il n'existe pas toujours de plus gros ensemble $\mu$-négligeable. Pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, il n'en existe pas.

   En effet, supposons par l'absurde que $N$ est le plus gros $\lambda$-négligeable. On peut dire dans ce cas que $N$ est mesurable sinon il est contenu strictement dans un mesurable de mesure égale à 0 ce qui contredit l'hypothèse que $N$ est le plus gros négligeable.

   On sait que $\lambda(\mathbb{R}) = +\infty$ donc $N \subsetneq \mathbb{R}$. Il existe $x \in \mathbb{R}$ avec $x \notin N$. Soit $N^{'} = N \cup \{x\}$.

   $N^{'} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\lambda(N^{'}) = \lambda(N) + \lambda(\{x\}) = 0$ donc $N^{'}$ est $\lambda$-négligeable et $N^{'} \supset N$.

## 4.5 Normes sur $L^p$ $(p \in [1, +\infty[)$

### Notations

1. Pour $f \in \mathcal{L}(X, T)$ et $p \in [1, +\infty[$, on note
$$N_p(f) = \left( \int |f(x)|^p \, \mu\,(dx) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

2. Pour $\widetilde{f} \in L^p$ et $p \in [1, +\infty[$, on note
$$\|\widetilde{f}\|_p = N_p(f).$$

**Remarque 7.** *Si $f \in \mathcal{L}(X, T)$ alors*
$$\boxed{f \in \mathcal{L}^p \Leftrightarrow N_p(f) < +\infty.}$$

**Définition 3.**

Soient $p$ et $q$ dans $[1, +\infty[$, on dit que $p$ et $q$ sont conjugués si $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. On dit alors que $q$ est l'exposant conjugué de $p$ (il est unique).

**Remarque 8.** On convient que 1 et $+\infty$ sont conjugués.

**Lemme 2 (Inégalité de Young).**

Soient $a$ et $b$ deux réels strictement positifs, $p$ et $q$ conjugués dans $[1, +\infty[$. Alors $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$.

**Lemme 3 (Inégalité de Hölder).**

Soient $p$ et $q$ conjugués dans $[1, +\infty[$. Soient $f \in \mathcal{L}^p$ et $g \in \mathcal{L}^q$ alors
$$\boxed{N_1(f \times g) \leq N_p(f) \times N_q(g) \quad \text{et} \quad f \times g \in \mathcal{L}^1.}$$

**Remarque 9.** *Si $p = q = 2$, on obtient l'inégalité de* ***Cauchy-Schwartz****.*

**Lemme 4 (Inégalité de Minkowski).**

Soient $p$ dans $[1, +\infty[$, $f \in \mathcal{L}^p$ et $g \in \mathcal{L}^p$ alors

$$\boxed{N_p(f+g) \leq N_p(f) + N_p(g).}$$

**Théorème 4.5.1.** Pour $p \in [1, +\infty[$, $\|.\|_p$ est une norme sur $L^p$.

**Théorème 5 (Fischer-Riesz).**

Pour $p \in [1, +\infty[$, $(L^p, \|.\|_p)$ est un espace de Banach.

## 4.6 Espaces $L^\infty$

**Définition 4.**

Une fonction $f$ de $\mathcal{L}(X, T)$ est dite essentiellement bornée s'il existe $r \geq 0$ tel que $|f| \leq r$ $\mu$-p.p.
On note $\mathcal{L}^\infty(X, T, \mu)$ l'ensemble des fonctions essentiellement bornées de $\mathcal{L}(X, T)$.

**Proposition 12.**

1. $\mathcal{L}^\infty$ est un espace vectoriel réel.
2. $\mathcal{N} \subset \mathcal{L}^\infty$.

**Définition 5.**

1. $L^\infty(X, T, \mu)$ est l'espace vectoriel quotient de $\mathcal{L}^\infty(X, T, \mu)$ par $\mathcal{N}$.
2. Si $f \in \mathcal{L}(X, T)$,
$$N_\infty(f) = \inf\{r \geq 0 \ \ / \ \ |f| \leq r \ \ \mu\text{-p.p}\}$$
3. Si $\widetilde{f} \in L^\infty$ alors $\|\widetilde{f}\|_\infty = N_\infty(f)$.

### Conséquence

Si $f \in \mathcal{L}(X, T)$,

$$\boxed{f \in \mathcal{L}^\infty(X,T) \ \Leftrightarrow N_\infty(f) < +\infty.}$$

**Théorème 6.**

1. $\|.\|_\infty$ est une norme sur $L^\infty$.
2. $(L^\infty, \|.\|_\infty)$ est complet.
3. **Inégalité de Hölder :** pour 1 et $+\infty$ : si $f \in \mathcal{L}^1$ et $g \in \mathcal{L}^\infty$ alors $fg$ est $\mu$-intégrable et

$$\boxed{N_1(f \times g) \leq N_1(f) \times N_\infty(g).}$$

**Proposition 13** (Relations entre les $\mathcal{L}^p$)**.**

Si $\mu(X) < +\infty$ et $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq +\infty$ alors

$$\mathcal{L}^\infty \subset \mathcal{L}^{p_2} \subset \mathcal{L}^{p_1} \subset \mathcal{L}^1.$$

**Démonstration .**

- *$\mathcal{L}^\infty \subset \mathcal{L}^p$ pour $p$ fini, en effet,*

$$f \in \mathcal{L}^\infty \Rightarrow |f| \leq N_\infty(f) \quad \mu - p.p$$

$$\Rightarrow |f|^p \leq (N_\infty(f))^p \quad \mu - p.p \Rightarrow \int |f|^p d\mu \leq (N_\infty(f))^p\,\mu(X) < +\infty \quad \mu - p.p$$

*Donc $f \in \mathcal{L}^p$.*

- *Si $p_1 \leq p_2$. Soit $f \in \mathcal{L}^{p_2}$. On distingue deux cas :*

  – $|f| \leq 1$ *donc*

$$|f|^{p_1} \leq 1 \Rightarrow \int |f|^{p_1} d\mu \leq \underbrace{\int 1 d\mu}_{=\mu(X)} < \infty \Rightarrow f \in \mathcal{L}^{p_1} \Rightarrow \mathcal{L}^{p_2} \subset \mathcal{L}^{p_1}.$$

  – $|f| \geq 1$ *donc*

$$|f|^{p_1} \leq |f|^{p_2} \Rightarrow \int |f|^{p_1} d\mu \leq \int |f|^{p_2} d\mu < \infty \Rightarrow f \in \mathcal{L}^{p_1} \Rightarrow \mathcal{L}^{p_2} \subset \mathcal{L}^{p_1}.$$

### 4.6.1 Théorème de Radon Nikodym

Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on considère $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$. On veut définir, à partir d'une variable aléatoire réelle $\mathrm{X} \in L^1\big(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}\big)$, une autre variable aléatoire réelle qui va "oublier" tout se qui se passe en dehors de $\mathcal{B}$.

L'espérance conditionnelle sert à modéliser la réponse à la question suivante : si X est une variable aléatoire liée à une certaine expérience, que sait-on d'elle si l'on n'a pas toute l'information (donnée par la tribu $\mathcal{A}$) des événements, mais seulement une information partielle (donnée par une sous-tribu $\mathcal{B}$).

En pratique, il est fréquent de travailler sur $\big(\mathbb{R}, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right)\big)$, $\big(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n\left(\mathbb{R}\right)\big)$ et $\big(\mathbb{N}, \mathcal{P}\left(\mathbb{N}\right)\big)$ munis des lois de probabilités qui seront dominées par $\lambda$, mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, $\lambda_n$, mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ et $\mu$, mesure discrète de comptage sur $\mathbb{N}$. Ces lois admettront donc des densités par rapport à $\lambda$, $\lambda_n$ et $\mu$.

Les théorèmes suivants énoncent des conditions générales d'existence de densités.

**Définition 4.**

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable, $\mu : \mathcal{T} \to [0, +\infty]$ une mesure positive, on dit que $\mu$ est $\sigma$-finie, si

1. il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $A_n \in \mathcal{T}$ pour tout entier n, telle que $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega$,
2. $\mu(A_n) < +\infty$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Mise en garde.**

- Une mesure $\sigma$-finie peut être de masse totale infinie, par exemple la mesure de Lebesgue.
- La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ sont $\sigma$-finies.

**Théorème 7** (Théorème de Radon-Nikodym, Lebesgue-Nikodym)**.**

Soient $\mu$ et $\nu$ deux mesures $\sigma-$finies sur $(\Omega, \mathcal{T})$. Il existe alors un unique couple de mesures $\sigma-$finies $(\mu_a, \mu_s)$ sur $(\Omega, \mathcal{T})$ telles que

1. $\mu = \mu_a + \mu_s$,
2. $\mu_a \ll \nu$ et $\mu_s \perp \nu$.

De plus, il existe une fonction mesurable $f : \Omega \to \mathbb{R}_+$ telle que

$$\forall \mathcal{A} \in \mathcal{T}, \quad \mu_a\left(\mathcal{A}\right) = \int_{\mathcal{A}} f d\nu$$

et la fonction $f$ est unique à un ensemble de $\nu-$mesure nulle près.

### 4.6.2 Mesure image

**Définition 5.**

Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, $\left(\Omega', \mathcal{A}\right)$ un espace mesurable, et $\mathbf{T} : (\Omega, \mathcal{T}) \to \left(\Omega', \mathcal{A}\right)$ une application mesurable. On appelle mesure image de $\mu$ par $\mathbf{T}$, la mesure $\mu_{\mathbf{T}}$ définie sur $\left(\Omega', \mathcal{A}\right)$ par :

$$\forall B \in \mathcal{A}, \quad \mu_{\mathbf{T}}(B) = \mu\big(\mathbf{T}^{-1}(B)\big) = \mu \circ \mathbf{T}^{-1}(B).$$

**Exemple 2.** Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $\big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$ l'espace mesurable des boréliens. Soit X une variable aléatoire de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ dans $\big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$. On définira l'image par X de $\mathbb{P}$ par :

$$\forall b \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}_{\mathrm{X}}\Big(]-\infty, b]\Big) = \mathbb{P}\Big(\mathrm{X}^{-1}\Big(]-\infty, b]\Big)\Big) = \mathbb{P}\Big(\mathrm{X} \in ]-\infty, b]\Big).$$

On retrouve ici la notion de la fonction de répartition de X.

**Théorème 8** ( Théorème de transfert)**.**

Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, $\left(\Omega', \mathcal{A}\right)$ un espace mesurable, et $\mathbf{T} : (\Omega, \mathcal{T}) \to \left(\Omega', \mathcal{A}\right)$ une application mesurable. $\mu_{\mathbf{T}}$ la mesure image de $\mu$ par $\mathbf{T}$ définie sur $\left(\Omega', \mathcal{A}\right)$. Soit $f : \left(\Omega', \mathcal{A}\right) \to \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$ une fonction mesurable. Alors

$f$ est $\mu_{\mathbf{T}}-$intégrable si et seulement si l'application mesurable $f \circ \mathbf{T}$ est $\mu-$intégrable

et on a

$$\int_{\Omega'} f d\mu_{\mathbf{T}} = \int_{\Omega} f \circ \mathbf{T} d\mu.$$

# 5 | Produit de mesures

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathbf{B}$ deux ensembles mesurables respectivement dans deux espaces mesurés $(\Omega_1, \mathcal{T}_1, \mu)$ et $(\Omega_2, \mathcal{T}_2, \nu)$. On construit intuitivement la mesure de $\mathcal{A} \times \mathbf{B}$ égale à $\mu(\mathcal{A}) \times \nu(\mathbf{B})$. La théorie de la mesure nous donne ce résultat. Le théorème de **Fubini** nous permettra d'intégrer par rapport à une mesure produit et facilitera le calcul des intégrales multiples.

## Sommaire



## 5.1 Produit de tribus

**Définition 8.**

On appelle pavé mesurable tout ensemble $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ avec $\mathcal{A}_i \in \mathcal{T}_i$, $i \in \{1, 2\}$.

**Remarque 10.** Le complémentaire d'un pavé peut s'écrire comme une union finie de pavés :

$$(\Omega_1 \times \Omega_2) \setminus (\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2) = \Big( (\Omega_1 \setminus A_1) \times (\Omega_2 \setminus \mathcal{A}_2) \Big) \cup \Big( (\Omega_1 \setminus \mathcal{A}_1) \times \Omega_2 \Big) \cup \Big( \Omega_1 \times (\Omega_2 \setminus \mathcal{A}_2) \Big).$$

**Propriété 14.**

Une union finie de pavés mesurables est égale à une union finie de pavés mesurables disjoints.

**Définition 9.**

On appelle tribu produit, $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$, de $\mathcal{T}_1$ par $\mathcal{T}_2$ la tribu de parties de $\Omega_1 \times \Omega_2$ engendrée par les pavés mesurables de $\Omega_1 \times \Omega_2$ : $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2 := \sigma\Big( \{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2; \ \ \mathcal{A}_1 \in \mathcal{T}_1, \ \ \mathcal{A}_2 \in \mathcal{T}_2\} \Big)$

**Remarque 11.**

1. La famille des pavés mesurables n'est pas elle même une tribu en général. Elle n'est stable ni par réunion finie ni par complémentaire.

2. Le produit de deux tribus n'est pas commutatif. La tribu $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ n'est pas en général égale à $\mathcal{T}_2 \otimes \mathcal{T}_1$, tout simplement parce que le produit cartésien n'est pas commutatif : $\Omega_1 \times \Omega_2 \neq \Omega_2 \times \Omega_1$. Par conséquent le produit de deux mesures que nous allons définir sur $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ ne sera pas non plus commutatitif.

**Conséquence :** $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^2\right) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Par récurrence, on peut démontrer à partir du résultat précédent que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \underbrace{\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \ldots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})}_{\text{n fois}}$.

**Propriété 15.**

1. Tout ouvert de $\mathbb{R}^2$ est réunion dénombrable de pavés ouverts.
2. $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^2\right) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

**Proposition 1.**

Soit $(Y, \mathcal{F})$ un espace mesurable. On considère pour $i = 1, 2$ la projection canonique de $\Omega_1 \times \Omega_2$ sur $\Omega_i$,

$$\begin{array}{cccc} \pi_i & : & \Omega_1 \times \Omega_2 & \to & \Omega_i \\ & & (x_1, x_2) & \mapsto & x_i \end{array}$$

La fonction $g : \ Y \to \Omega_1 \times \Omega_2$ est $(\mathcal{F}, \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2)$-mesurable si et seulement si $\forall i \in \{1, 2\}$, $\pi_i \circ g$ est $(\mathcal{F}, \mathcal{T}_i)$-mesurable.

**Définition 10.**

Si $\mathcal{A} \in \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ et si $x_1 \in \Omega_1$, on appelle coupe de $\mathcal{A}$ par rapport à $x_1$, notée $\mathcal{A}x_1$, l'ensemble

$$\{x_2 \in \Omega_2, \quad (x_1, x_2) \in \mathcal{A}\}.$$

On a $\mathcal{A}x_1 = \pi_2 (\mathcal{A} \cap \{x_1\} \times \Omega_2)$.

**Proposition 2.**

Soient $(\Omega_1, \mathcal{T}_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{T}_2)$ et $(\Omega_3, \mathcal{T}_3)$ trois espaces mesurables.

1. Si $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \Omega_3$ est $(\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3)$-mesurable, alors

   $\looparrowright$ $\forall x_2 \in \Omega_2, \quad x_1 \mapsto f(x_1, x_2)$ est $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_3)$ – mesurable.

   $\looparrowright$ $\forall x_1 \in \Omega_1, \quad x_2 \mapsto f(x_1, x_2)$ est $(\mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3)$ – mesurable.
2. Si $\mathcal{A} \in \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ alors $\mathcal{A}x_1 \in \mathcal{T}_2$ pour tout $x_1 \in \Omega_1$.

## 5.2 Mesure produit

**Définition 11.**

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, on dit que $\mu$ est $\sigma$-finie, si

1. il existe une suite $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathcal{A}_n \in \mathcal{T}$ pour tout entier n, telle que $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n = \Omega$,
2. $\mu(\mathcal{A}_n) < +\infty$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Remarque 12.**

- Une mesure $\sigma$-finie peut être de masse totale infinie, par exemple la mesure de Lebesgue.
- La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ sont $\sigma$-finies.

**Théorème 7.**

Soient $(\Omega_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés et $\mu_1$ et $\mu_2$ $\sigma$-finies alors il existe une mesure unique $\mu$ sur $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ telle que :

$$\forall \mathcal{A}_1 \in \mathcal{T}_1,\ \forall \mathcal{A}_2 \in \mathcal{T}_2, \quad \mu\left(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2\right) = \mu_1\left(\mathcal{A}_1\right) \times \mu_2\left(\mathcal{A}_2\right).$$

- $\mu$ est une mesure $\sigma$-finie
- $x_1 \mapsto \mu_2\left(Ax_1\right)$ est $\mathcal{T}_1$-mesurable pour tout $A \in \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$
- $\mu(A) = \displaystyle\int_{\Omega_1} \mu_2\left(Ax_1\right) d\mu_1(x_1)$.

$\mu$ est la mesure produit de $\mu_1$ par $\mu_2$ et on la note $\mu_1 \otimes \mu_2$.

**Remarque 13.**

1. Si on a trois espaces mesurés $(\Omega_i, \mathcal{T}_i, \mu_i)$, $i \in \{1, 2, 3\}$ avec $\mu_i$ $\sigma$-finies alors on a l'associativité du produit : $\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \mu_3 = \mu_1 \otimes \left(\mu_2 \otimes \mu_3\right)$. Comme on avait $(\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2) \otimes \mathcal{T}_3 = \mathcal{T}_1 \otimes (\mathcal{T}_2 \otimes \mathcal{T}_3)$, on peut donc définir la mesure sur $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2 \otimes \mathcal{T}_3$ comme l'unique mesure $\mu$ sur ce produit de tribus telle que

$$\mu\left(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \mathcal{A}_3\right) = \mu(\mathcal{A}_1) \times \mu(\mathcal{A}_2) \times \mu(\mathcal{A}_3) \quad \text{avec} \quad \mathcal{A}_i \in \mathcal{T}_i, \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

   Idem avec n facteurs $(n \in \mathbb{N}^*)$ (par récurrence).

2. La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ est le produit des mesures de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. et la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ est le produit des mesures de Lebesgue sur chaque facteur.

## 5.3 Théorème de Fubini

Dans la suite, on suppose que $(\Omega_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés et $\mu_1$ et $\mu_2$ $\sigma$-finies et $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$. L'intégration d'une fonction numérique définie sur $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ par rapport à la mesure $\mu$ est précisée par les deux théorèmes ci-dessous.
Le premier traite le cas d'une fonction positive, connu sous le nom du **théorème de Fubini-Tonelli** ; le deuxième traite le cas d'une fonction de signe quelconque, connu sous le nom du **théorème de Fubini**.

**Théorème 8 (Théorème de Fubini-Tonelli).**

Si $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to [0, +\infty]$ est $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$-mesurable, alors les fonctions $\varphi$ et $\psi$ définies respectivement sur $\Omega_1$ et $\Omega_2$ par

$$\varphi : x_1 \mapsto \int_{\Omega_2} f(x_1, x_2)\, d\mu_2(x_2) \quad \text{et} \quad \psi : x_2 \mapsto \int_{\Omega_1} f(x_1, x_2)\, d\mu_1(x_1)$$

sont mesurables. et

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f d\mu &= \int_{\Omega_1} \left( \int_{\Omega_2} f(x_1, x_2)\, d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) \\ &= \int_{\Omega_2} \left( \int_{\Omega_1} f(x_1, x_2)\, d\mu_1(x_1) \right) d\mu_2(x_2). \end{aligned}$$

**Théorème 9 (Théorème de Fubini).**

Si $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ est $\mu$-intégrable, alors

1. Pour presque tout $x_1 \in \Omega_1$, la fonction $x_2 \mapsto f(x_1, x_2)$ est intégrable sur $\Omega_2$ et la fonction $\varphi$ définie presque partout sur $\Omega_1$ par
$$\varphi : x_1 \mapsto \int_{\Omega_2} f(x_1, x_2)\, d\mu_2(x_2)$$
est $\mu_1$-intégrable sur $\Omega_1$.

2. Pour presque tout $x_2 \in \Omega_2$, la fonction $x_1 \mapsto f(x_1, x_2)$ est intégrable sur $\Omega_1$ et la fonction $\psi$ définie presque partout sur $\Omega_2$ par
$$\psi : x_2 \mapsto \int_{\Omega_1} f(x_1, x_2)\, d\mu_1(x_1)$$
est $\mu_2$-intégrable sur $\Omega_2$.

3. $$\begin{aligned} \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f d\mu &= \int_{\Omega_1} \left( \int_{\Omega_2} f(x_1, x_2)\, d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) \\ &= \int_{\Omega_2} \left( \int_{\Omega_1} f(x_1, x_2)\, d\mu_1(x_1) \right) d\mu_2(x_2). \end{aligned}$$

Si l'une des trois intégrales suivantes

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} |f| d\mu \\ I_2 &= \int_{\Omega_1} \left( \int_{\Omega_2} |f(x_1, x_2)\, d\mu_2(x_2) \right) | d\mu_1(x_1) \\ I_3 &= \int_{\Omega_2} \left( \int_{\Omega_1} |f(x_1, x_2)\, d\mu_1(x_1) \right) | d\mu_2(x_2) \end{aligned}$$

est finie alors il en est de même pour les deux autres, $f$ est intégrable et

$$\int_{\Omega_1} \left( \int_{\Omega_2} f(x_1, x_2)\, d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) = \int_{\Omega_2} \left( \int_{\Omega_1} f(x_1, x_2)\, d\mu_1(x_1) \right) d\mu_2(x_2).$$

**Mode d'emploi :**

Pour prouver que $f$ est intégrable sur $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$, on applique le théorème de Fubini-Tonelli à $|f|$ qui affirme que $I_1$, $I_2$ et $I_3$ sont égales (qu'elles soient finies ou non), puis montrer que $I_2$ ou $I_3$ est finie. Souvent, l'une d'elles est facile à estimer.

**Mise en garde :**

Bien distinguer le cas $f$ mesurable positive où les trois intégrales $I_1$, $I_2$ et $I_3$ ont toujours un sens (valeur finie ou infinie) du cas où $f$ est de signe variable pour lequel les intégrales

$$\int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2} f d\mu_2\right) d\mu_1 \quad \text{et} \quad \int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} f d\mu_1\right) d\mu_2$$

peuvent ne pas exister, ou bien peuvent exister avec des valeurs finies ou infinies distinctes ou égales, sans que $f$ soit intégrable. Autrement dit, si $f$ est en général mesurable mais pas intégrable, les expressions

$$\int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2} f d\mu_2\right) d\mu_1 \quad \text{et} \quad \int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} f d\mu_1\right) d\mu_2$$

peuvent exister mais avoir des valeurs différentes.

## Fonctions à variables séparées

Si $f_1$ et $f_2$ sont deux fonctions mesurables positives (ou intégrables), définies respectivement sur $\Omega_1$ et $\Omega_2$. On pose $f(x_1, x_2) = f_1(x_1) \times f_2(x_2)$. Alors $f$ est $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$-mesurable et

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f d\left(\mu_1 \times \mu_2\right) = \left(\int_{\Omega_1} f_1 d\mu_1\right)\left(\int_{\Omega_2} f_2 d\mu_2\right).$$