Ingénieurs 1ère année : Mathématiques appliquées

Mesure et intégration

CM5 – Mesures produit

Nisrine FORTIN CAMDAVANT

Introduction

$(\Omega_1, \mathcal{T}_1, \mu)$ et $(\Omega_2, \mathcal{T}_2, \nu)$ deux espaces mesurés.

- Étant donnés deux ensembles mesurables A et B respectivement dans Ω_1 et Ω_2, on a en pratique

$$\text{mesure}\,(A \times B) = \mu(A) \times \nu(B).$$

La théorie de la mesure nous donne ce résultat.

- Le théorème de **Fubini** nous permettra d'intégrer par rapport à une mesure produit et facilitera le calcul des intégrales multiples.

Pavé mesurable

Soient $(\Omega_1, \mathcal{T}_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{T}_2)$ deux espaces mesurables.

Définition

On appelle pavé mesurable tout ensemble $A_1 \times A_2$ avec $A_i \in \mathcal{T}_i$, $i \in \{1, 2\}$.

Remarque : Le complémentaire d'un pavé peut s'écrire comme une union finie de pavés :

$$(\Omega_1 \times \Omega_2) \setminus (A_1 \times A_2) = \Big((\Omega_1 \setminus A_1) \times (\Omega_2 \setminus A_2) \Big) \cup \Big((\Omega_1 \setminus A_1) \times \Omega_2 \Big) \cup \Big(\Omega_1 \times (\Omega_2 \setminus A_2) \Big).$$

Proposition

Une union finie de pavés mesurables est égale à une union finie de pavés mesurables disjoints.

Tribu produit

On appelle tribu produit de $\mathcal{T}_1$ par $\mathcal{T}_2$ la tribu de parties de $\Omega_1 \times \Omega_2$ engendrée par les pavés mesurables de $\Omega_1 \times \Omega_2$. On la note $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$.

$$\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2 := \sigma\Big(\{A_1 \times A_2; \quad A_1 \in \mathcal{T}_1, \quad A_2 \in \mathcal{T}_2\} \Big)$$

Remarques :

- Le produit de deux tribus n'est pas commutatif. La tribu $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ n'est pas en général égale à $\mathcal{T}_2 \otimes \mathcal{T}_1$, tout simplement parce que le produit cartésien n'est pas commutatif :

  $$\Omega_1 \times \Omega_2 \neq \Omega_2 \times \Omega_1.$$

  Par conséquent le produit de deux mesures que nous allons définir sur $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ ne sera pas non plus commutatif.
- $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^2\right) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Par récurrence, on peut démontrer à partir du résultat précédent que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

  $$\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^n\right) = \underbrace{\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \ldots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})}_{\text{n fois}}$$

Projection canonique et coupe

Pour $i = 1, 2$, l'application

$$\begin{array}{cccc} \pi_i & : & \Omega_1 \times \Omega_2 & \rightarrow & \Omega_i \\ & & (x_1, x_2) & \mapsto & x_i \end{array}$$

est appelée la projection canonique sur Ω_i.

La fonction $g : \; Y \rightarrow \Omega_1 \times \Omega_2$ est $(\mathcal{F}, \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2)$-mesurable si et seulement si $\forall i \in \{1, 2\}$, $\pi_i \circ g$ est $(\mathcal{F}, \mathcal{T}_i)$-mesurable.

Proposition

Si $A \in \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ et si $x_1 \in \Omega_1$, on appelle coupe de A par rapport à x_1, notée A_{x_1}, l'ensemble

$$\left\{ x_2 \in \Omega_2, \quad (x_1, x_2) \in A \right\}.$$

On a $A_{x_1} = \pi_2\Big(A \cap \big(\{x_1\} \times \Omega_2\big)\Big)$.

Soient $(\Omega_1, \mathcal{T}_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{T}_2)$ et $(\Omega_3, \mathcal{T}_3)$ trois espaces mesurables.

1. Si $A \in \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ alors $A_{x_1} \in \mathcal{T}_2$ pour tout $x_1 \in \Omega_1$.
2. Si $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \Omega_3$ est $(\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3)$-mesurable, alors
   - $\forall x_2 \in \Omega_2$, $x_1 \mapsto f(x_1, x_2)$ est $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_3)$-mesurable.
   - $\forall x_1 \in \Omega_1$, $x_2 \mapsto f(x_1, x_2)$ est $(\mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3)$-mesurable.

Mesure σ-finie

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable, $\mu : \mathcal{T} \to [0, +\infty]$ une mesure positive, on dit que μ est σ-finie, si

1. il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}$ telle que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = X$,
2. $\mu(A_n) < +\infty$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque

- Une mesure σ-finie peut être de masse totale infinie, par exemple la mesure de Lebesgue.
- La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ sont σ-finies.

Théorème et mesure produit

Soient $(\Omega_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés et μ_1 et μ_2 σ-finies alors

- il existe une mesure unique μ sur $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ telle que :

$$\forall A_1 \in \mathcal{T}_1,\ \forall A_2 \in \mathcal{T}_2, \quad \mu\left(A_1 \times A_2\right) = \mu_1\left(A_1\right) \times \mu_2\left(A_2\right).$$

- μ est une mesure σ-finie
- $x_1 \mapsto \mu_2\left(A x_1\right)$ est $\mathcal{T}_1$-mesurable pour tout $A \in \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$
- $\mu(A) = \displaystyle\int_{\Omega_1} \mu_2\left(A x_1\right) d\mu_1(x_1).$

Définition

μ est la mesure produit de μ_1 par μ_2 et on la note $\mu_1 \otimes \mu_2$.

Remarques

1. Si on a trois espaces mesurés $(\Omega_i, \mathcal{T}_i, \mu_i)$, $i \in \{1,2,3\}$ avec μ_i σ-finies alors on a l'associativité du produit

$$\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \mu_3 = \mu_1 \otimes (\mu_2 \otimes \mu_3)\,.$$

   Comme on avait $(\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2) \otimes \mathcal{T}_3 = \mathcal{T}_1 \otimes (\mathcal{T}_2 \otimes \mathcal{T}_3)$, on peut donc définir la mesure sur $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2 \otimes \mathcal{T}_3$ comme l'unique mesure μ sur ce produit de tribus telle que

$$\mu\,(A_1 \times A_2 \times A_3) = \mu(A_1) \times \mu(A_2) \times \mu(A_3) \quad \text{avec} \quad A_i \in \mathcal{T}_i, \;\; i \in \{1,2,3\}\,.$$

   Idem avec n facteurs ($n \in \mathbb{N}^*$) (par récurrence).

2. La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ est le produit des mesures de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

   La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) est le produit des mesures de Lebesgue sur chaque facteur.

Intégration par rapport à une mesure produit

Soient $(\Omega_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés et μ_1 et μ_2 σ-finies et $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$.

- L'intégration d'une fonction numérique définie sur $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ par rapport à la mesure μ est précisée par les deux théorèmes ci-dessous.
- Le premier traite le cas d'une fonction positive, connu sous le nom du **théorème de Fubini-Tonelli** ;
- le deuxième traite le cas d'une fonction de signe quelconque, connu sous le nom du **théorème de Fubini**.

Attention.

Dans la suite, on considère $(\Omega_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés et μ_1 et μ_2 σ-finies et $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$.

Théorème de Fubini-Tonelli

Théorème de Fubini-Tonelli.

Si $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to [0, +\infty]$ est $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$-mesurable, alors

1. Les fonctions φ et ψ définies respectivement sur Ω_1 et Ω_2 par

$$\varphi : x_1 \mapsto \int_{\Omega_2} f(x_1, x_2)\, d\mu_2(x_2) \quad \text{et} \quad \psi : x_2 \mapsto \int_{\Omega_1} f(x_1, x_2)\, d\mu_1(x_1)$$

   sont mesurables.

2.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f d\mu &= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x_1, x_2)\, d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) \\ &= \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x_1, x_2)\, d\mu_1(x_1) \right) d\mu_2(x_2). \end{aligned}$$

Commentaire

Ce théorème nous permet entre autres de calculer des intégrales multiples par intégrations successives dans l'ordre que l'on désire avec la seule hypothèse f mesurable et positive.

Théorème de Fubini (1).

Soit $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction μ-intégrable, alors

1.
   - $\forall x_1 \in \Omega_1$ p.p, la fonction $x_2 \mapsto f(x_1, x_2)$ est intégrable sur Ω_2.
   - La fonction φ définie p.p sur Ω_1 par

   $$\varphi : x_1 \mapsto \int_{\Omega_2} f(x_1, x_2)\, d\mu_2(x_2)$$

   est μ_1-intégrable sur Ω_1.

2.
   - Pour p.p $x_2 \in \Omega_2$, la fonction $x_1 \mapsto f(x_1, x_2)$ est intégrable sur Ω_1.
   - La fonction ψ définie p.p sur Ω_2 par

   $$\psi : x_2 \mapsto \int_{\Omega_1} f(x_1, x_2)\, d\mu_1(x_1)$$

   est μ_2-intégrable sur Ω_2.

3. $$\begin{aligned}\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f d\mu &= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x_1, x_2)\, d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) \\ &= \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x_1, x_2)\, d\mu_1(x_1) \right) d\mu_2(x_2).\end{aligned}$$

Théorème de Fubini (2).

Si l'une des trois intégrales suivantes

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} \left| f \right| d\mu \\ I_2 &= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} \left| f(x_1, x_2) \right| d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) \\ I_3 &= \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} \left| f(x_1, x_2) \right| d\mu_1(x_1) \right) d\mu_2(x_2) \end{aligned}$$

est finie alors il en est de même pour les deux autres, f est intégrable et

$$\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x_1, x_2)\, d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x_1, x_2)\, d\mu_1(x_1) \right) d\mu_2(x_2).$$

Mode d'emploi et mise en garde

1. Pour prouver que f est intégrable sur $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$, on applique le théorème de Fubini-Tonelli à $|f|$ qui affirme que I_1, I_2 et I_3 sont égales (qu'elles soient finies ou non), puis montrer que I_2 ou I_3 est finie. Souvent, l'une d'elles est facile à estimer.

2. Bien distinguer le cas f mesurable positive où les trois intégrales I_1, I_2 et I_3 ont toujours un sens (valeur finie ou infinie) du cas où f est de signe variable pour lequel les intégrales

$$\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f d\mu_2 \right) d\mu_1 \quad \text{et} \quad \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f d\mu_1 \right) d\mu_2$$

peuvent ne pas exister, ou bien peuvent exister avec des valeurs finies ou infinies distinctes ou égales, sans que f soit intégrable. Autrement dit, si f est en général mesurable mais pas intégrable, les expressions

$$\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f d\mu_2 \right) d\mu_1 \quad \text{et} \quad \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f d\mu_1 \right) d\mu_2$$

peuvent exister mais avoir des valeurs différentes.

Fonctions à variables séparées

Si f_1 et f_2 sont deux fonctions mesurables positives (ou intégrables), définies respectivement sur Ω_1 et Ω_2. On pose

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) \times f_2(x_2).$$

Alors f est $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$-mesurable et

$$\boxed{\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} fd\,(\mu_1 \times \mu_2) = \left(\int_{\Omega_1} f_1 d\mu_1\right)\left(\int_{\Omega_2} f_2 d\mu_2\right).}$$

Remarques sur les hypothèses des théorèmes de Fubini-Tonelli et Fubini

Les théorèmes de Fubini-Tonelli et Fubini cessent d'être vrais si

- on supprime l'hypothèse de σ-finitude d'une des mesures μ_1 et μ_2. (Voir TD5.)
- dans le théorème de Fubini, si les valeurs des deux intégrales I_1 et I_2 sont distinctes, on peut déduire que la fonction f n'est pas $\mu_1 \otimes \mu_2$-intégrable (Voir TD5.)
- en revanche, si les valeurs des deux intégrales I_1 et I_2 sont égales, on ne peut pas déduire directement que la fonction f est $\mu_1 \otimes \mu_2$-intégrable (Voir TD5.)