Ingénieurs $1^{\text{ère}}$ année : Mathématiques appliquées

Mesure et intégration

CM4 – Intégration de fonctions mesurables

Nisrine FORTIN CAMDAVANT

1. Intégration de fonctions mesurables réelles
2. Espaces $\mathcal{L}^p$ et L^p
3. Normes sur L^p ($p \in [1, +\infty[$)
4. Espaces L^∞

Intégration de fonctions réelles mesurables

On note $\mathfrak{L}(\Omega, \mathcal{T})$ l'ensemble des fonctions réelles mesurables (C'est un espace vectoriel)

$$\mathfrak{L}(\Omega, \mathcal{T}) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}, f \ \text{ est} - (\mathcal{T}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))\text{-mesurables.}\}$$

Intégrale de Lebesgue d'une fonction réelle mesurable

On note $f^+ = \sup(f, 0)$ et $f^- = \sup(-f, 0)$.

Une fonction μ-intégrable

Une fonction f de Ω dans $\mathbb{R}$ est dite μ-intégrable si

- $\rightsquigarrow$ f est $(\mathcal{T}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$-mesurable et
- $\rightsquigarrow$ $\displaystyle\int f^+ d\mu < +\infty$ et $\displaystyle\int f^- d\mu < +\infty$.

Intégrale d'une fonction réelle mesurable

Si f est μ-intégrable. On appelle intégrale de f, notée $\displaystyle\int f d\mu$ ou $\displaystyle\int_\Omega f d\mu$ ou $\displaystyle\int_\Omega f(x) d\mu(x)$ le nombre

$$\int_\Omega f^+ d\mu - \int_\Omega f^- d\mu.$$

On note $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ (ou en abrégé $\mathcal{L}^1$) l'ensemble des fonctions μ-intégrables.

Propriétés de l'intégrale de fonctions réelles

Propriétés.

1. Si $f \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{T})$, on a l'équivalence suivante
$$f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu) \Longleftrightarrow \int |f| \, d\mu < +\infty.$$

2. Si $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$, alors
$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu.$$

3. Soient $f \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{T})$ et $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$. Si $| f | \leq | g |$ μ-p.p alors
$$f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu) \text{ et } \int | f | \, d\mu \leq \int | g | \, d\mu.$$

4. Soit $f \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{T})$. Il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{E}(\Omega, \mathcal{T})$ qui converge simplement vers f sur Ω. Si de plus, f est bornée, alors $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur Ω.

Démonstration. Voir Notes de cours.

Soient f et g deux fonctions mesurables μ-intégrables. $\alpha \in \mathbb{R}$.

Règles opératoires des intégrales de fonctions réelles mesurables

1. $\displaystyle\int_\Omega (\alpha f)\, d\mu = \alpha \int_\Omega f d\mu$ (**Homogénéité**).
2. $\displaystyle\int_\Omega (f+g)\, d\mu = \int_\Omega f d\mu + \int_\Omega g d\mu$ (**Additivité**).
3. $\displaystyle f \leq g \Longrightarrow \int_\Omega f d\mu \leq \int_\Omega g d\mu$ (**Croissance de l'intégrale**).
4. $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ est un espace vectoriel réel.

Si $f \in \mathcal{L}^1$ et si $\mathrm{N} \in \mathcal{T}$ est μ-négligeable alors

$$\int_{\mathrm{N}} f d\mu = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\Omega \setminus \mathrm{N}} f d\mu = \int_\Omega f d\mu.$$

Démonstration. Voir Notes de cours.

Théorème de la convergence dominée

Théorème ♣♣

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{L}(\Omega, \mathcal{T})$ et $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$. On suppose que

- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f μ-p.p
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$.

Alors

$$\begin{cases} f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu \end{cases}$$

Espaces $\mathcal{L}^p$

Soit $p \in [1, +\infty[$. On dit que f est est de puissance $p^{\text{ième}}$-intégrable, et on note $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$, si f est mesurable et $|f|^p$ est μ-intégrable.

$$f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{T}, \mu) \Longleftrightarrow f \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{T}) \quad \text{et} \quad \int_\Omega |f|^p \, d\mu < +\infty.$$

---

1. La fonction $|f|^p$ désigne la fonction $x \longmapsto (|f(x)|)^p$ (ce n'est pas la composée.)
2. Pour $p = 1$, on obtient les fonctions μ-intégrables.

   Pour $p = 2$, on obtient les fonctions de carré intégrables.
3. Si $f \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{T})$ alors $|f|^p \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{T})$.

L'espace $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ est un espace vectoriel.

Espace L^p

Notation

- $\rightsquigarrow$ On note $\mathcal{N} = \{f \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{T}), \quad f = 0 \ \ \mu \text{ -p.p}\}$.
- $\rightsquigarrow$ Pour $f \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{T})$ et $g \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{T})$, $f - g \in \mathcal{N} \Leftrightarrow f = g \ \ \mu$ p.p.

$\mathcal{N}$ est un espace vectoriel réel et pour tout $p \in [1, +\infty[$, $\mathcal{N} \subset \mathcal{L}^p$.

L'espace $\mathsf{L}^p(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ (ou en abrégé L^p) est l'espace vectoriel quotient de $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ par $\mathcal{N}$. C'est l'ensemble des classes d'équivalence d'éléments de $\mathcal{L}^p$ par la relation $f = g \quad \mu -$ p.p.

Pour une fonction $f \in \mathcal{L}^p$, on définit la classe d'équivalence de la fonction f par $\widetilde{f} \in \mathsf{L}^p(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ telle que

$$\widetilde{f} \in \mathsf{L}^p(\Omega, \mathcal{T}, \mu) \Longleftrightarrow \widetilde{f} = \{g \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{T}, \mu) \quad \text{tel que} \quad f - g \in \mathcal{N}\}.$$

Remarque

Bien que ses éléments soient des classes d'équivalence des fonctions. On a l'habitude de dire qu'un élément de $\mathsf{L}^p(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ est une fonction, bien que strictement il s'agisse d'une classe de fonctions.

- Si $\mathcal{N} = \{f_0\}$ alors $\mathsf{L}^p = \mathcal{L}^p$.
- S'il existe dans $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un plus gros (au sens de l'inclusion) ensemble μ-négligeable $\mathcal{N}$, le passage au quotient sera alors inutile.

Normes sur L^p ($p \in [1, +\infty[$)

Notations

1. Pour $f \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{T})$ et $p \in [1, +\infty[$, on note

$$\mathrm{N}_p(f) = \left(\int |f(x)|^p \, \mu(dx)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$$\rightsquigarrow \quad \mathrm{N}_p^p(f) = \int |f(x)|^p \, \mu(dx).$$

2. Pour $\widetilde{f} \in \mathrm{L}^p$ et $p \in [1, +\infty[$, on note

$$\|\widetilde{f}\|_p = \mathrm{N}_p(f).$$

Remarque

Si $f \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{T})$ alors

$$\boxed{f \in \mathcal{L}^p \Leftrightarrow \mathrm{N}_p(f) < +\infty.}$$

Définition

Soient p et q dans $[1, +\infty[$, on dit que p et q sont conjugués si $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. On dit alors que q est l'exposant conjugué de p (il est unique).
On convient que 1 et $+\infty$ sont conjugués.

Inégalité de Young

Soient a et b deux réels strictement positifs, p et q conjugués dans $[1, +\infty[$.
Alors $ab \leq \dfrac{1}{p} a^p + \dfrac{1}{q} b^q$.

Démonstration. Voir Notes de cours.

Inégalité de Hölder

Soient p et q deux réels conjugués dans $[1, +\infty[$. Soient $f \in \mathcal{L}^p$ et $g \in \mathcal{L}^q$ alors

$$\boxed{\mathrm{N}_1(f \times g) \leq \mathrm{N}_p(f) \times \mathrm{N}_q(g) \quad \text{et} \quad f \times g \in \mathcal{L}^1.}$$

Démonstration. Voir Notes de cours.

Inégalité de Minkowski

Soient p dans $[1, +\infty[$, $f \in \mathcal{L}^p$ et $g \in \mathcal{L}^p$ alors

$$\boxed{\mathrm{N}_p(f+g) \leq \mathrm{N}_p(f) + \mathrm{N}_p(g).}$$

Théorème

Pour $p \in [1, +\infty[$, $\|.\|_p$ est une norme sur L^p.

L'application $N : E \to \mathbb{R}_+$ est une norme sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E si et seulement si

1. $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$.
2. $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$, $\forall (x, y) \in E^2$.
3. $N(\alpha x) = |\alpha| N(x)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$.

Espaces L^∞

Fonction essentiellement bornée

Définition

Une fonction f de $\mathcal{L}(\Omega, \mathcal{T})$ est dite essentiellement bornée s'il existe $r \geq 0$ tel que $|f| \leq r$ μ-p.p.

- L'ensemble $\{x \in \Omega, \quad f(x) > r\}$ est μ-négligeable.
- Exemple : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

La fonction f n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$, en revanche, elle est essentiellement bornée (par la mesure de Lebesgue λ) sur $\mathbb{R}$ car $f \leq 1$ λ-p.p puisque

$$\lambda(\{x \in \mathbb{R}, \ f(x) > 1\}) \leq \underbrace{\lambda(\mathbb{Q})}_{=0}.$$

Donc $\lambda(\{x \in \mathbb{R}, \ f(x) > 1\}) = 0$.

On note $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ l'ensemble des fonctions essentiellement bornées de $\mathcal{L}(\Omega, \mathcal{T})$.

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{T}, \mu) = \{f \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{T}), \quad \exists r \geq 0 \text{ tel que } |f| \leq r \quad \mu - \text{p.p.}\}$$

Lorsqu'il n y a pas d'ambiguité, on notera $\mathcal{L}^\infty$.

Propriétés

1. $\mathcal{L}^\infty$ est un espace vectoriel réel.
2. $\mathcal{N} \subset \mathcal{L}^\infty$.

Définitions

1. $\mathrm{L}^\infty(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ est l'espace vectoriel quotient de $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ par $\mathcal{N}$.
2. Si $f \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{T})$,
$$\mathrm{N}_\infty(f) = \inf \{r \geq 0 \ / \ |f| \leq r \quad \mu\text{-p.p}\}$$
3. Si $\widetilde{f} \in \mathrm{L}^\infty$ alors $\|\widetilde{f}\|_\infty = \mathrm{N}_\infty(f)$.

Conséquences

Si $f \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{T})$,

$$\boxed{f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{T}) \Leftrightarrow \mathrm{N}_\infty(f) < +\infty.}$$

Théorème

1. Si f est essentiellement bornée sur Ω alors

$$\text{Pour presque tout } x \in \Omega, \quad |f(x)| \leq \mathrm{N}_\infty(f)$$

2. Si f est continue et essentiellement bornée sur Ω alors

$$\text{Pour tout } x \in \Omega, \quad |f(x)| \leq \mathrm{N}_\infty(f)$$

Théorème

1. $\|.\|_\infty$ est une norme sur L^∞.
2. **Inégalité de Hölder :** si $f \in \mathcal{L}^1$ et $g \in \mathcal{L}^\infty$ alors fg est μ-intégrable et

$$\mathrm{N}_1(f \times g) \leq \mathrm{N}_1(f) \times \mathrm{N}_\infty(g).$$

Relations entre les $\mathcal{L}^p$

Si $\mu(\Omega) < +\infty$ et $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq +\infty$ alors

$$\mathcal{L}^\infty \subset \mathcal{L}^{p_2} \subset \mathcal{L}^{p_1} \subset \mathcal{L}^1.$$

Démonstration. Voir TD

Mise en garde.

Attention à la condition $\mu(\Omega) < +\infty$. Si on reprend l'exemple $f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

- $\lambda(\mathbb{R}) = +\infty$,
- $f \in \mathcal{L}^\infty$,
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x)| d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} |f(x)| d\lambda(x) + \underbrace{\int_{\mathbb{Q}} |f(x)| d\lambda(x)}_{=0 \text{ car } \mathbb{Q} \text{est négligeable.}} = \int_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} 1 d\lambda(x) =$

  $\lambda(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = +\infty$ donc $f \notin \mathcal{L}^1$.