Ingénieurs 1$^{\text{ère}}$ année : Mathématiques appliquées

Mesure et intégration

CM3 – Intégration de fonctions mesurables positives

Nisrine FORTIN CAMDAVANT

Fonctions étagées

Les fonctions étagées jouent, dans la construction de l'intégrale de Lebesgue, le rôle réservé aux fonctions en escalier dans la théorie de l'intégrale de Riemann.

Fonctions étagées

Dans la suite de ce cours, on considère l'espace mesuré $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$.

Définition

Soit f une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$. La fonction f est dite $\mathcal{T}$-étagée si :

- f est $(\mathcal{T}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$-mesurable.
- $f(\Omega)$ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}$.

Exemple d'une fonction étagée : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}, \quad a_i \in \mathbb{R}, \; A_i \in \mathcal{T}$.

- φ est mesurable car combinaison linéaire de fonctions mesurables.
- φ prend un nombre fini de valeurs $(a_i)_{i=1,\dots,n}$

Donc φ est une fonction $\mathcal{T}$-étagée.

Notations

$$\mathcal{E}(\Omega, \mathcal{T}) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \;\; \mathcal{T}\text{- étagées} \right\}$$

$$\mathcal{E}_+(\Omega, \mathcal{T}) = \left\{ f : \Omega \to [0, +\infty[\;\; \mathcal{T}\text{- étagées} \right\}$$

Représentation canonique d'une fonction étagée

Soit f une fonction étagée. Désignons par $a_1, \dots, a_m$ les éléments de $f(\Omega)$, la suite $(a_i)_{1 \le i \le m}$ étant strictement croissante, et posons pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$

$$A_i = f^{-1}\big(\{a_i\}\big).$$

Les sous-ensembles $A_1, A_2, \dots, A_m$ de Ω sont non vides, mesurables, deux à deux disjoints et de réunion Ω. Ainsi f s'écrit sous la forme

$$f = \sum_{i=1}^{m} a_i 1_{A_i} \tag{1}$$

- f mesurable, $\{a_i\}$ un borélien donc $f^{-1}\big(\{a_i\}\big)$ est mesurable.
- Pour $i \neq j$, $x \in A_i \cap A_j \Rightarrow f(x) = a_i$ et $f(x) = a_j$, impossible car $a_i \neq a_j$ donc $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Inversement, étant données une suite strictement croissante $(a_i)_{1 \le i \le m}$ d'éléments de $\mathbb{R}$ et une suite $(A_i)_{1 \le i \le m}$ de sous-ensembles de Ω, mesurables, non vides, deux à deux disjoints et dont la réunion est Ω, il existe une fonction étagée f de Ω dans $\mathbb{R}$ et une seule telle que

$$f = \sum_{i=1}^{m} a_i 1_{A_i}.$$

$\Big((a_1, \dots, a_m), (A_1, \dots, A_m)\Big)$ le couple canonique de f et (1) est la

Exemples

1. Soit $A \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$. La fonction $u = 1_A$ est étagée et a pour représentation canonique

$$u = 0 \times 1_{A^C} + 1 \times 1_A.$$

2. $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Soit $\varphi = 1_{]0,+\infty[}$, son écriture canonique est :

$$\varphi = 0 \times 1_{]-\infty,0]} + 1 \times 1_{]0,+\infty[}.$$

D'autres écritures non canoniques de φ :

$$\varphi = \underbrace{0}_{a_1} \times 1_{]-\infty,0]} + \underbrace{1}_{a_2} \times 1_{]0,1[} + \underbrace{1}_{a_3} \times 1_{[1,+\infty[}$$

$a_2 = a_3 \Longrightarrow$ pas canonique

$$\varphi = 0 \times 1_{\underbrace{]-\infty,0]}_{A_1}} + \frac{1}{3} \times 1_{\underbrace{]0,+\infty[}_{A_2}} + \frac{2}{3} \times 1_{\underbrace{]0,+\infty[}_{A_3}}$$

$A_2 \cap A_3 \neq \emptyset \Longrightarrow$ pas canonique

Opérations sur les fonctions étagées

Soient f et g deux fonctions étagées sur Ω, α et β deux réels alors les fonctions suivantes

- $\alpha f + \beta g$,
- fg,
- $\sup(f, g)$ et
- $\inf(f, g)$

sont des fonctions étagées sur Ω.

Intégrale d'une fonction étagée positive

Définition

Soit $\varphi \in \mathcal{E}_+(\Omega, \mathcal{T})$ et $\sum_{i=1}^{m} a_i 1_{A_i}$ sa représentation canonique. On appelle intégrale de φ sur Ω par rapport à la mesure μ et on note $\int_\Omega \varphi d\mu$ ou $\int_\Omega \varphi(x) d\mu(x)$, la somme

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \mu(A_i).$$

En vertu de la convention $0 \times \mu(A) = 0$ si $\mu(A) = +\infty$, la somme $\sum_{i=1}^{m} a_i \mu(A_i)$ a toujours un sens dans $[0, +\infty]$ puisque chaque terme $a_i \mu(A_i)$ appartient à $[0, +\infty]$.

On dit qu'une fonction étagée et positive φ est μ-intégrable si $\int_\Omega \varphi d\mu < +\infty$.

Exemples

On prend $(\Omega, \mathcal{T}) = \big(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R})\big)$ et $\varphi = 1_{\mathbb{R}}$. Il est clair que $\varphi \in \mathcal{E}_+(\Omega, \mathcal{T})$.

- Pour $\mu = \lambda$, on a $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi d\lambda = \lambda(\mathbb{R}) = +\infty$.
- Pour $\mu = \delta_0$, on a $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi d\delta_0 = \delta_0(\mathbb{R}) = 1$

Définition

Soit $\varphi \in \mathcal{E}_+(\Omega, \mathcal{T})$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_i 1_{A_i}$ sa représentation canonique. Soit A une partie mesurable. On définit l'intégrale de φ sur A :

$$\int_A \varphi d\mu = \int_\Omega \varphi 1_A d\mu = \sum_{i=1}^{m} a_i \mu(A_i \cap A).$$

Le calcul de l'intégrale d'une fonction étagée à partir de la définition nécessite la décomposition canonique. Le lemme suivant permet d'alléger le recours systématique à cette décomposition.

Lemme

Soit φ une fonction étagée positive telle que $\varphi = \sum_{i=1}^{p} t_i 1_{C_i}$ où C_i sont des ensembles mesurables et disjoints deux à deux et t_i sont des constantes **pas forcément distinctes** alors

$$\int_\Omega \varphi d\mu = \sum_{i=1}^{p} t_i \mu(C_i).$$

Propriétés.

1. Si $\varphi \in \mathcal{E}_+(\Omega, \mathcal{T})$ et si $r \in [0, +\infty[$, alors $\int r\varphi d\mu = r \int \varphi d\mu$.

2. Si $\varphi \in \mathcal{E}_+(\Omega, \mathcal{T})$ et si $\psi \in \mathcal{E}_+(\Omega, \mathcal{T})$ alors
$$\int (\varphi + \psi) d\mu = \int \varphi d\mu + \int \psi d\mu.$$

3. Si $\varphi \in \mathcal{E}_+(\Omega, \mathcal{T})$ et si $\psi \in \mathcal{E}_+(\Omega, \mathcal{T})$ alors
$$\varphi \leq \psi \Rightarrow \int \varphi d\mu \leq \int \psi d\mu.$$

4. Si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions étagées positives qui tend μ-p.p vers une fonction étagée φ, alors la suite $\left(\int \varphi_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\int \varphi d\mu$:
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \left(\int \varphi_n d\mu\right) = \int \lim_{n\to+\infty} \varphi_n d\mu = \int \varphi d\mu.}$$

Démonstration. Voir Notes de cours.

Intégration de fonctions mesurables positives

- On note $\overline{\mathfrak{L}}_+(\Omega, \mathcal{T})$ l'ensemble des fonctions mesurables et positives

$$\overline{\mathfrak{L}}_+(\Omega, \mathcal{T}) = \left\{ f : \Omega \to [0, +\infty], \left(\mathcal{T}, \mathfrak{B}\left(\overline{\mathbb{R}}^+\right)\right) \text{-mesurables.} \right\}$$

- Le théorème suivant nous permettra de faire le lien entre les fonctions étagées positives et les fonctions mesurables positives. Il sera d'une grande utilité dans la démonstration de beaucoup de propriétés dans les exercices.

Si $f \in \overline{\mathfrak{L}}_+(\Omega, \mathcal{T})$, il existe une suite croissante $(\varphi_n)_n$ dans $\mathcal{E}_+(\Omega, \mathcal{T})$ telle que $(\varphi_n)_n$ converge simplement vers f sur Ω.
Si de plus, f est bornée, alors $(\varphi_n)_n$ converge uniformément vers f sur Ω.

Dans ce cours, Ω désigne un ensemble quelconque non vide, $\mathcal{T}$ une tribu de parties de Ω et μ une mesure positive sur $\mathcal{T}$. On considère l'espace mesuré $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$.

Soit $f \in \overline{\mathfrak{L}}_+(\Omega, \mathcal{T})$. On appelle intégrale de Lebesgue de f sur Ω par rapport à la mesure μ, et on note $\int_\Omega f d\mu$ ou $\int_\Omega f(x) d\mu(x)$, l'élément de $[0, +\infty]$ suivant

$$\boxed{(f) = \sup \left\{ \int \varphi d\mu, \ \ \varphi \in \mathcal{E}_+(\Omega, \mathcal{T}), \ \varphi \leq f \right\}.}$$

Autrement dit,

$$\boxed{\int_\Omega f d\mu = \sup \left\{ \int \varphi d\mu, \ \ \varphi \in \mathcal{E}_+(\Omega, \mathcal{T}), \ \varphi \leq f \right\}.}$$

Plus généralement, si $A \in \mathcal{T}$, on pose

$$\int_A f d\mu = \int_\Omega f 1_A d\mu.$$

Une fonction mesurable intégrable

Mise en garde

Bien distinguer le fait que $\displaystyle\int_\Omega f d\mu$ a toujours un sens dans $[0,+\infty]$ et le fait que $\displaystyle\int_\Omega f d\mu$ est finie, c'est à dire $\displaystyle\int_\Omega f d\mu \in [0,+\infty[$. D'où la définition suivante :

Définition

Soit $f \in \overline{\mathfrak{L}}_+(\Omega,\mathcal{T})$. On dit que f est μ-intégrable sur X (ou simplement intégrable quand il n'y a pas de risque de confusion) si l'intégrale $\displaystyle\int_\Omega f d\mu$ est finie : $\displaystyle\int_\Omega f d\mu < +\infty$.

Soient f et g deux fonctions mesurables et positives sur Ω. Soient A et B deux ensembles mesurables. $\alpha \in [0, +\infty]$.

Règles opératoires des intégrales de fonctions mesurables et positives

1. $$\int_\Omega (\alpha f)\, d\mu = \alpha \int_\Omega f d\mu$$ (**Homogénéité positive**).

   La démonstration découle aisément de la définition de l'intégrale d'une fonction mesurable positive et en distinguant les cas $\alpha = 0$ et $\alpha > 0$.

2. $$\int_\Omega (f+g)\, d\mu = \int_\Omega f d\mu + \int_\Omega g d\mu$$ (**Additivité**).

   La démonstration découle du théorème 1 et du théorème de la convergence monotone.

3. $$f \leq g \Longrightarrow \int_\Omega f d\mu \leq \int_\Omega g d\mu$$ (**Croissance de l'intégrale**).

4. $$A \subset B \Longrightarrow \int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu.$$

Règles opératoires des intégrales de fonctions mesurables et positives

5. Soit $(A_i)_i$ une famille d'ensembles mesurables et disjoints deux à deux, alors
$$\int_{\bigcup\limits_{i\geq 1} A_i} f \; d\mu = \sum_{i\geq 1} \int_{A_i} f d\mu.$$
6. Si N est μ-négligeable alors $\displaystyle\int_{\mathrm{N}} f d\mu = 0$ et $\displaystyle\int_{\Omega\setminus \mathrm{N}} f d\mu = \int_{\Omega} f d\mu$.
7. $f = 0$ μ-p.p si et seulement si $\displaystyle\int_{\Omega} f d\mu = 0$.
8. Si $f \in \overline{\mathfrak{L}}_{+}(\Omega, \mathcal{T})$ et si $\displaystyle\int_{\Omega} f d\mu < +\infty$, alors $\{x \in \Omega, \quad f(x) = +\infty\}$ est μ-négligeable.

Démonstration. Voir Notes de cours.

Principaux théorèmes d'intégration de fonctions mesurables positives

- Le développement de la théorie de l'intégration sur $\overline{\mathfrak{L}}_+(\Omega, \mathcal{T})$ repose sur un important théorème de convergence des intégrales, propre aux suites croissantes de fonctions mesurables et positives, qui permet sous un minimum d'hypothèses de commuter "intégration" et "passage à la limite".

- En l'absence de l'hypothèse de croissance sur la suite de fonctions de $\overline{\mathfrak{L}}_+(\Omega, \mathcal{T})$, on a tout de même un résultat partiel.

Théorème de la convergence monotone ou de Beppo-Levi

Théorème ♣♣

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions de $\overline{\mathfrak{L}}_+(\Omega,\mathcal{T})$ qui tend μ-p.p vers une fonction f, alors

1. $f \in \overline{\mathfrak{L}}_+(\Omega,\mathcal{T})$.
2. La suite $\left(\int f_n \, d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en croissant vers $\int f \, d\mu$:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega \lim_{n\to+\infty} f_n d\mu.$$

Une application du théorème de la convergence monotone

Conséquence : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles de $\mathcal{T}$, telle que $A_n \subset A_{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$.

- La fonction indicatrice 1_{A_n} est mesurable car A_n est mesurable.
- La fonction indicatrice 1_{A_n} est positive.
- La fonction indicatrice 1_{A_n} est croissante car $A_n \subset A_{n+\mathbf{1}}$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} 1_{A_n} = 1_{\bigcup\limits_n A_n}$.

D'après le théorème de Beppo-Lévi $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_\Omega 1_{A_n} d\mu = \int_\Omega 1_{\bigcup\limits_n A_n} d\mu$. Et comme

$$\int_\Omega 1_{A_n} d\mu = \mu(A_n)$$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup\limits_n A_{n\in\mathbb{N}}\right)$.

Lemme de Fatou

En l'absence de l'hypothèse de croissance sur la suite de fonctions de $\overline{\mathfrak{L}}_+(\Omega, \mathcal{T})$, on a tout de même le résultat partiel suivant :

Corollaire ♣♣

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\overline{\mathcal{L}}_+(\Omega, \mathcal{T})$ alors

$$\int \liminf f_n d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu.$$

Démonstration. Voir Notes de cours.

Remarques

- $\liminf f_n = \sup_{p\in\mathbb{N}} \left(\inf_{n\geq p} f_n(x) \right)$.
- Si f est μ-intégrable sur Ω alors f est finie μ-p.p.

Intégration d'une série de fonctions de $\overline{\mathfrak{L}}_+(\Omega, \mathcal{T})$

Les séries de fonctions sont d'utilisation courante, il est utile de donner l'expression du théorème de la convergence monotone dans ce cas.

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\overline{\mathfrak{L}}_+(\Omega, \mathcal{T})$. Alors

1. $\displaystyle\int_\Omega \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_\Omega f_n d\mu\right)$;
2. Si $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_\Omega f_n d\mu\right) < +\infty$, il existe $\mathrm{N} \in \mathcal{T}$ μ-négligeable tel que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n < +\infty$ pour $x \in \Omega \backslash \mathrm{N}$.

Démonstration. Voir TD 3.

Intégration au sens de Riemann et au sens de Lebesgue

En pratique, on utilisera souvent des intégrales par rapport à la mesure de Lebesgue, les théorèmes suivants expriment des cas où on peut se ramener à un calcul d'intégrale au sens de Riemann. Les propriétés suivantes seront valables pour des fonctions mesurables positives ou de signe quelconque.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable.

1. Si f est Riemann intégrable, alors f est Lebesgue intégrable et les intégrales sont égales, autrement dit

$$\int_{[a,b]} f \, d\lambda = \int_a^b f(x) \, dx$$

2. Si f est bornée alors f est Riemann intégrable ssi

$$\lambda\left(\{x \in]a, b[\text{ tel que } f \text{ n'est pas continue en } x\}\right) = 0,$$

autrement dit, si et seulement si l'ensemble des points de discontinuités de f dans $]a, b[$ est de mesure de Lebesgue nulle.

Intégration au sens de Riemann et au sens de Lebesgue

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction mesurable et Riemann intégrable sur tout intervalle $[0, n]$, $n \in \mathbb{N}$.

f est Lebesgue intégrable sur $[0, +\infty[$ ssi $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^n |f(x)|\, dx < +\infty$.

Dans ce cas,

$$\boxed{\int_0^{+\infty} f(x)\, dx = \int_{[0,+\infty[} f \, d\lambda.}$$