Ingénieurs 1ère année : Mathématiques appliquées

Mesure et intégration

CM2 – Introduction à la mesure

Nisrine FORTIN CAMDAVANT

Fonction d'ensembles et mesures

Fonction d'ensembles

Soit Ω un ensemble non vide et $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Une fonction

$$\mathrm{m} : \mathcal{T} \longrightarrow [0, +\infty]$$

est appelée une fonction d'ensembles positive.

Une "mesure abstraite" est une fonction d'ensemble vérifiant certaines propriétés. Une propriété que l'on exigera d'une telle fonction sera l'additivité au sens suivant :

La σ-additivité

Une fonction $\mathrm{m} : \mathcal{T} \longrightarrow [0, +\infty]$ est σ-**additive** si et seulement si pour toute suite $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{T}$ vérifiant $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n \in \mathcal{T}$ et $\mathrm{A}_n \cap \mathrm{A}_p = \emptyset$ pour $n \neq p$,

$$\mathrm{m}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{m}\left(\mathrm{A}_n\right).$$

On appelle mesure positive une fonction d'ensemble positive, σ-additive, définie sur une tribu $\mathcal{T}$ et vérifiant $\mathrm{m}(\emptyset) = 0$.

Autrement dit,

si $\mathcal{T}$ est une tribu de parties de Ω et si $\mathrm{m} : \mathcal{T} \longrightarrow [0, +\infty]$, m est une mesure positive sur $\mathcal{T}$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. $\mathrm{m}(\emptyset) = 0$
2. $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ avec $\mathrm{A}_n \cap \mathrm{A}_p = \emptyset$ pour $n \neq p$ alors

$$\mathrm{m}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{m}(\mathrm{A}_n).$$

Exemples

Mesure de Dirac

Soit $x_0 \in \Omega$. On pose :

$$m(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } \; x_0 \in A \\ \\ 0 & \text{si } \; x_0 \notin A \end{cases}$$

Si Ω est muni d'une tribu $\mathcal{T}$, m est une mesure appelée mesure de Dirac de masse 1 et concentrée au point x_0 et elle est notée δ_{x_0}.

Mesure de comptage

Soit m : $\mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, +\infty]$ définie par

$$m(A) = \begin{cases} \text{card }(A) & \text{si } \; A \; \text{ est fini} \\ \\ +\infty & \text{si } \; A \; \text{ est infini} \end{cases}$$

- m est une mesure.
- m aura beaucoup d'intérêt pour $\Omega = \mathbb{N}$.

Exemples

Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

Soit Ω l'ensemble des unions finies d'intervalles semi-ouverts. Si

$$A = [a_1, b_1[\cup[a_2, b_2[\cup \cdots \cup [a_n, b_n[$$

avec $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots < a_n < b_n$. On pose

$$\mathrm{m}(A) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)\,.$$

En prolongeant m à la plus petite tribu contenant Ω, on obtient la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, notée λ.

- $\lambda\big(\{x\}\big) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- $\lambda\big([a_i, b_i[\big) = \lambda\big(]a_i, b_i[\big) = \lambda\big([a_i, b_i]\big) = b_i - a_i$.

Propriétés : conséquences de la σ-additivité

Soit Ω un ensemble, $\mathcal{T}$ est une tribu de parties de Ω et m une mesure positive sur $\mathcal{T}$. On a alors les propriétés suivantes :

Propriétés.

1. $(A, B) \in \mathcal{T}^2$. $A \subset B \Longrightarrow m(A) \leq m(B)$.

   || $\rightsquigarrow$ Démonstration – Voir TD 2.

2. $A_n \in \mathcal{T}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n)$.

   || $\rightsquigarrow$ Démonstration – Voir TD 2.

3. $A_n \in \mathcal{T}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $A_n \subset A_{n+1}$ $\forall n$ alors

$$m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} m(A_n).$$

   || $\rightsquigarrow$ Démonstration – Voir Notes de cours.

4. $A_n \in \mathcal{T}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $A_{n+1} \subset A_n$ $\forall n$ et $m(A_0) < +\infty$ alors

$$m\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} m(A_n).$$

   || $\rightsquigarrow$ Démonstration – Voir Notes de cours.

Remarques

Mise en garde.

- Dans la propriété 4. de la proposition précédente, on peut remplacer l'hypothèse
$$"\mathrm{m}(A_0) < +\infty"$$
par "il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{m}(A_k) < +\infty$".

- Si on ne met pas l'hypothèse $\mathrm{m}(A_0) < +\infty$ (ou il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{m}(A_k) < +\infty$), la propriété 4. n'est plus valable.

  Exemple : Prenons $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, m la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$.

  Soit $A_n = \{n, n+1, \ldots\}$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$, donc $\mathrm{m}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 0$. D'autre part $\mathrm{m}(A_n) = +\infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$, donc $\mathrm{m}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \neq \lim_n \mathrm{m}(A_n)$.

Ensembles négligeables

- Les ensembles négligeables jouent un rôle très important dans la théorie de la mesure et de l'intégration.

- Les ensembles négligeables vont permettre d'exprimer le fait que certaines propriétés ponctuelles (continuité, convergence simple, majoration,...) n'ont pas lieu en tout point mais seulement "**presque partout**", c'est à dire sur le complémentaire d'un ensemble négligeable.

- Il s'avère techniquement nécessaire de ne pas restreindre la notion d'ensemble négligeable aux seuls sous-ensembles mesurables.

Ensembles négligeables

Dans tout ce chapitre, Ω désigne un ensemble quelconque non vide, $\mathcal{T}$ une tribu de parties de Ω et m une mesure positive sur $\mathcal{T}$. Le triplet $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{m})$ est appelé **un espace mesuré**.

Définition

1. On dit qu'un ensemble $\mathrm{N} \in \mathcal{T}$ est m-négligeable si $\mathrm{m}(\mathrm{N}) = 0$.
2. On dit qu'une partie N de Ω est m-négligeable s'il existe $A \in \mathcal{T}$ tel que $\mathrm{N} \subset A$ et $\mathrm{m}(A) = 0$.

Ensembles négligeables – Exemples

On considère l'espace mesuré $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{m})$ où $\Omega = \{a; b; c\}$, a, b et c des réels et

$$= \{\Omega, \emptyset, \{a, b\}, \{c\}\} .$$

Cas où $\mathrm{m} = \delta_c$ est la mesure de Dirac concentrée en c.

- $\rightsquigarrow$ **Les parties mesurables de mesure nulle :** $\delta_c(\emptyset) = 0$, $\delta_c(\{a, b\}) = 0$ car $c \notin \{a, b\}$.
- $\rightsquigarrow$ **Les parties non mesurables négligeables :**
  - $\lozenge$ $\{a\} \subset \{a, b\}$ et $\delta_c(\{a, b\}) = 0$ donc $\{a\}$ est δ_c-négligeable.
  - $\lozenge$ $\{b\} \subset \{a, b\}$ et $\delta_c(\{a, b\}) = 0$ donc $\{b\}$ est δ_c-négligeable.

Les ensembles δ_c-négligeables sont donc $\emptyset$, $\{a, b\}$, $\{a\}$ et $\{b\}$.

Ensembles négligeables – Exemples

Cas où m $= \mu_d$ est la mesure de comptage.

- **Les parties mesurables de mesure nulle :** $\mu_d(\emptyset) = 0$.
- **Les parties non mesurables négligeables :** La seule partie mesurable de mesure nulle est l'ensemble vide et ce dernier ne contient aucune partie de Ω.

L'unique ensemble μ_d-négligeable est donc $\emptyset$.

Ensembles négligeables – Exemples

Cas où m $= \lambda$ est la mesure de Lebesgue.

- **Les parties mesurables de mesure nulle :** $\lambda(\emptyset) = 0$, $\lambda(\Omega) = \lambda(\{a, b, c\}) = 0$ car $\{a, b, c\}$ est dénombrable.
  $\{a, b\} \subset \Omega$, $\{c\} \subset \Omega$ et $\lambda(\Omega) = 0$ donc $\lambda(\{a, b\}) = \lambda(\{c\}) = 0$.

- **Les parties non mesurables négligeables :** Toutes les parties de Ω sont par définition inclues dans Ω, $\lambda(\Omega) = 0$ donc toutes les parties de Ω sont λ-négligeables.

Les ensembles λ-négligeables sont donc toutes les parties de Ω.

Ensembles négligeables – Propriétés

1. $\emptyset$ est m-négligeable.
2. Si N est un ensemble m-négligeable, $N' \in \mathcal{T}$ avec $N' \subset N$, alors N' est m-négligeable.
3. La réunion d'une famille dénombrable d'ensembles m-négligeables est m-négligeable.

Démonstration. Voir Notes de cours.

Mise en garde.

La réunion d'une famille infinie non dénombrable d'ensembles m-négligeables n'est pas m-négligeable.

En effet, pour $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $m = \lambda$ où λ est la mesure de Lebesgue, on considère

$$A = [0,1] = \bigcup_{x\in[\mathbf{0},\mathbf{1}]} \{x\}.$$

$\rightsquigarrow$ $A \in \mathcal{T}$ et $\lambda(A) = 1$ donc A n'est pas λ-négligeable.

$\rightsquigarrow$ $\lambda(\{x\}) = 0, \forall x \in [0,1]$.

$\rightsquigarrow$ $\bigcup_{x\in[\mathbf{0},\mathbf{1}]} \{x\}$ n'est pas λ-négligeable même si $\{x\}$ est λ-négligeable.

Presque partout

Définition

Une propriété $\mathcal{P}(x)$ dépendant de l'élément $x \in \Omega$ est dite vérifiée m-presque partout (ou simplement presque partout quand il n'y a pas d'ambiguité) si l'ensemble des x de Ω pour lesquels la propriété $\mathcal{P}(x)$ est fausse est m-négligeable.

On écrira en abrégé $\mathcal{P}(x)$ est m-p.p. (ou simplement p.p. quand il n'ya pas d'ambiguité).

Espaces mesurés complets

Espaces mesurés complets

On a vu qu'une partie N de Ω m-négligeable n'est pas nécessairement un élément de la tribu $\mathcal{T}$.

- $\rightsquigarrow$ Pourtant pour respecter le principe de monotonie croissante de la mesure m, il est naturel d'attribuer à N la mesure 0.
- $\rightsquigarrow$ On est alors en train d'élargir la tribu $\mathcal{T}$.

D'où la définition suivante :

Définition

Si toutes les parties de Ω m-négligeables sont mesurables, on dit que l'espace $(\Omega, \mathcal{T}, m)$ est complet.

Espaces mesurés complets – Exemple

On considère l'espace mesuré $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{m})$ où $\Omega = \{a; b; c\}$, a, b et c des réels et $\mathcal{T} = \{\Omega, \emptyset, \{a, b\}, \{c\}\}$.

- Cas où $\mathrm{m} = \delta_c$ est la mesure de Dirac concentrée en c. L'ensemble des parties δ_c-négligeables est

$$\mathcal{N} = \{\emptyset, \{a, b\}, \{a\}, \{b\}\}$$

  $\{a\}$ est δ_c-négligeable mais non mesurable donc $(\Omega, \mathcal{T}, \delta_c)$ n'est pas un espace mesuré complet.

- Cas où $\mathrm{m} = \mu_d$ est la mesure de comptage. L'ensemble des parties μ_d-négligeables est

$$\mathcal{N} = \{\emptyset\}.$$

  $\emptyset$ est μ_d-négligeable et mesurable donc $(\Omega, \mathcal{T}, \mu_d)$ est un espace mesuré complet.

- Cas où $\mathrm{m} = \lambda$ est la mesure de Lebesgue. L'ensemble des parties λ-négligeables est

$$\mathcal{N} = \mathcal{P}(\Omega).$$

  $\{a\}$ est λ-négligeable mais non mesurable donc $(\Omega, \mathcal{T}, \lambda)$ n'est pas un espace mesuré complet.

Complétion d'un espace mesurable

Lorsqu'un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{m})$ n'est pas complet, on peut le *compléter* canoniquement de la façon suivante :

Propriété

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{m})$ un espace mesuré et soit $\mathcal{N}$ l'ensemble des parties m-négligeables. On considère

$$\widetilde{\mathcal{T}} = \{A \cup \mathrm{N} ; A \in \mathcal{T} \text{ et } N \in \mathcal{N}\}.$$

Pour tout $A \in \mathcal{T}$ et pour tout $\mathrm{N} \in \mathcal{N}$, on pose $\widetilde{\mathrm{m}}(A \cup \mathrm{N}) = \mathrm{m}(A)$. Alors

1. $\widetilde{\mathcal{T}}$ est une tribu sur Ω contenant $\mathcal{T}$;
2. $\widetilde{\mathrm{m}}$ définit une mesure positive sur $\widetilde{\mathcal{T}}$ qui coïncide avec m sur $\mathcal{T}$;
3. Si on note $\widetilde{\mathcal{N}}$ la famille des sous-ensembles de Ω $\widetilde{\mathrm{m}}$-négligeables alors $\widetilde{\mathcal{N}} = \mathcal{N}$;
4. $(\Omega, \widetilde{\mathcal{T}}, \widetilde{\mathrm{m}})$ est un espace mesuré complet.

Démonstration. Voir TD 2.

Complétion d'un espace mesurable

Définition

On dit que $(\Omega, \widetilde{\mathcal{T}}, \widetilde{\mathrm{m}})$ est le **complété** de l'espace mesuré $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{m})$.

Remarques

- Un espace mesuré complet est égal à son complété.
- La tribu $\widetilde{\mathcal{T}}$ dépend et de la tribu $\mathcal{T}$ et de la mesure m par rapport à laquelle on effectue la complétion.
- Si $\mathcal{P}(x)$ est une propriété dépendant de $x \in \Omega$ alors, $\mathcal{P}(x)$ est vraie m-p.p. si et seulement si $\mathcal{P}(x)$ est vraie $\widetilde{\mathrm{m}}$-p.p.

Complétion d'un espace mesurable – Exemple

On considère l'espace mesuré $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{m})$ où $\Omega = \{a; b; c\}$, a, b et c des réels et $\mathcal{T} = \{\Omega, \emptyset, \{a, b\}, \{c\}\}$.

- Cas où $\mathrm{m} = \delta_c$ est la mesure de Dirac concentrée en c. L'ensemble des parties δ_c-négligeables est

$$\mathcal{N} = \{\emptyset, \{a, b\}, \{a\}, \{b\}\}$$

$(\Omega, \mathcal{T}, \delta_c)$ n'est pas un espace mesuré complet et son complété est obtenu par union des ensembles mesurables et les ensembles négligeables :

$N \in \mathcal{N} A \in \mathcal{T}$	Ω	$\emptyset$	$\{a, b\}$	$\{c\}$
$\emptyset$	Ω	$\emptyset$	$\{a, b\}$	$\{c\}$
$\{a, b\}$	Ω	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	Ω
$\{a\}$	Ω	$\{a\}$	$\{a, b\}$	$\{a, c\}$
$\{b\}$	Ω	$\{b\}$	$\{a, b\}$	$\{b, c\}$

La tribu complétée dans ce cas est donc

$$\boxed{\tilde{\mathcal{T}} = \{\Omega, \emptyset, \{a, b\}, \{c\}, \{a\}, \{b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}.}$$

Complétion d'un espace mesurable – Exemple

On considère l'espace mesuré $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{m})$ où $\Omega = \{a; b; c\}$, a, b et c des réels et $\mathcal{T} = \{\Omega, \emptyset, \{a, b\}, \{c\}\}$.

- Cas où $\mathrm{m} = \mu_d$ est la mesure de comptage. $(\Omega, \mathcal{T}, \mu_d)$ est un espace mesuré complet donc

$$\boxed{\tilde{\mathcal{T}} = \mathcal{T}.}$$

- Cas où $\mathrm{m} = \lambda$ est la mesure de Lebesgue. L'ensemble des parties λ-négligeables est

$$\mathcal{N} = \mathcal{P}(\Omega).$$

  $(\Omega, \mathcal{T}, \lambda)$ n'est pas un espace mesuré complet et dans ce cas

$$\boxed{\tilde{\mathcal{T}} = \mathcal{P}(\Omega).}$$

Exemple : La tribu de Lebesgue $\mathcal{L}(\mathbb{R})$

Si $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{m}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. L'espace $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ n'est pas complet. Alors

- La tribu $\widetilde{\mathcal{T}}$ est la tribu de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et on la note $\mathcal{L}(\mathbb{R})$;
- La mesure $\widetilde{\lambda}$ s'appelle aussi la mesure de Lebesgue et sera aussi notée λ au lieu de $\widetilde{\lambda}$;
- Les éléments de $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ sont appelés parties mesurables au sens de Lebesgue ou parties Lebesgue-mesurables.