Ingénieurs 1$^{\text{ère}}$ année : Mathématiques appliquées

Mesure et intégration

CM1 – Tribu et application mesurable

Nisrine FORTIN CAMDAVANT

CY TECH

Introduction au module et organisation

Introduction au module

La théorie de la mesure permet d'associer une grandeur numérique à un ensemble. Plusieurs types de "mesures" ont déjà été rencontrés.

- **Le cardinal** d'un ensemble discret : le cardinal de $\{10, 19, 25, 75\}$ est 4 et le cardinal de $\mathbb{N}$ est $+\infty$.
- **La longueur** d'une courbe : la longueur de l'intervalle $[a, b]$, $a \leq b$ est $b - a$ et la longueur de la droite réelle est $+\infty$.
- **L'aire** d'une figure plane : l'aire du disque $\mathrm{D}(0, \mathrm{R})$ centré en $(0, 0)$ et de rayon R est $\pi \mathrm{R}^2$.
- **Le volume** d'un solide en dimension 3 : le volume du cylindre de base le disque $\mathrm{D}(0, \mathrm{R})$ et de hauteur h est $\pi \mathrm{R}^2 h$.
- **La probabilité** d'un évènement : la probabilité d'avoir la face quatre lors d'un lancer de dé équilibré est $1/6$.

Aperçu sur l'organisation du module

- Ces exemples forment des cas particuliers d'une notion plus générale de mesures (**Chapitre 2**), outil de base pour une nouvelle théorie de l'intégration, dite intégrale de Lebesgue **(Chapitre 3)**.
- L'intégrale au sens de Lebesgue généralise la notion de l'intégrale de Riemann. Cette nouvelle théorie s'applique à une classe de fonctions beaucoup plus grande (*les fonctions mesurables*), cette dernière étend la notion de continuité de fonctions **(Chapitre 1)**.
- Une mesure est associée à *une famille d'ensembles* à mesurer, appelée *tribu de parties* **(Chapitre 1)**. Ainsi, une *tribu* va englober des *ensembles mesurables* par une *mesure* donnée.
- On définira les fonctions qui préservent la propriété de mesurabilité de l'image réciproque d'un ensemble mesurable.
- Cette théorie s'appliquera à des théorèmes de convergence beaucoup plus puissants : théorème de convergence monotone, théorème de convergence dominée **(Chapitre 4)**.

Algèbre de Boole et tribu

Intuitivement, si on se place dans un ensemble non vide Ω, une tribu définie sur Ω contiendra des sous-ensembles de Ω. Ces ensembles qu'on mesure seront "rassemblés" de la façon suivante :

- La mesure choisie doit nous permettre de mesurer Ω donc

  $\boxed{\Omega \text{ doit appartenir à la tribu ;}}$

- Si A appartient à la tribu, on peut donc la mesurer et on souhaite que le complémentaire de A dans Ω soit aussi *mesurable* donc on impose dans la définition

  $\boxed{\text{la condition de stabilité par passage au complémentaire ;}}$

- Si on sait mesurer deux parties A et B (appartiennent donc à la tribu), on souhaite que leur union soit aussi *mesurable* donc on impose dans la définition

  $\boxed{\text{la condition de stabilité par union dénombrable.}}$

Algèbre de Boole et tribu

Algèbre de Boole

Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. On dit que $\mathcal{A}$ est une algèbre de Boole (de parties de Ω) si elle vérifie les propriétés suivantes :

1. $\Omega \in \mathcal{A}$,
2. $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow \Omega \backslash A \in \mathcal{A}$,
3. $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{A} \Longrightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$.

Tribu

Soit $\mathcal{T} \subset P(\Omega)$, on dit que $\mathcal{T}$ est une tribu de parties (ou σ-algèbre) si elle vérifie :

1. $\Omega \in \mathcal{T}$,
2. **la stabilité par passage au complémentaire :** $A \in \mathcal{T} \Longrightarrow \Omega \backslash A \in \mathcal{T}$,
3. **la stabilité par réunion dénombrable :** Si $A_n \in \mathcal{T}$ pout tout $n \in \mathbb{N}$ alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$.

Algèbre de Boole et tribu

Conséquence :

- Une tribu est une algèbre de Boole stable par réunion dénombrable.
- $\emptyset \in \mathcal{T}$
- Si $A_n \in \mathcal{T}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$.

Démonstration TD 1

Exemples.

◇ La plus petite tribu de Ω est $\mathcal{T} = \{\emptyset, \Omega\}$, elle est appelée tribu grossière.

◇ La plus grande tribu de Ω est $\mathcal{T} = P(\Omega)$, elle est appelée tribu discrète.

La tribu trace

Tribu trace

Soient $\mathcal{T}$ une tribu de parties sur Ω et $U \subset \Omega$.

$$\mathcal{T}_U = \{A \cap U,\ A \in \mathcal{T}\}$$

est une tribu sur U. Cette tribu est appelée la tribu trace sur U.

Démonstration TD 1.

Tribu engendrée, tribu borélienne

Tribu engendrée, tribu borélienne

En général, une tribu contient énormément d'éléments d'où le nom de tribu.

$\rightsquigarrow$ Souvent, on ne peut pas décrire tous les éléments d'une tribu mais cela n'a pas d'importance.

$\rightsquigarrow$ En effet, ce qu'il faut retenir, sont certaines parties de Ω de la tribu et on doit rester dans la tribu lorsqu'on itère sur les éléments de la tribu les opérations

- de complémentarité,
- de réunion dénombrable.

Tribu engendrée

Soit Ω un ensemble et $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(\Omega)$.

Définition

On dit que $\mathcal{T}$ est la tribu engendrée par $\mathcal{H}$ si $\mathcal{T}$ est **la plus petite tribu** (au sens de l'inclusion) de parties de Ω contenant $\mathcal{H}$.
On note dans ce cas, $\mathcal{T} = \sigma(\mathcal{H})$.

Proposition

$\sigma(\mathcal{H})$ existe toujours, c'est l'intersection de toutes les tribus sur Ω contenant $\mathcal{H}$.

Tribu engendrée - Exemples

- Si $\mathcal{H} = \{\emptyset\}$ ou bien si $\mathcal{H} = \{\Omega\}$, alors
$$\boxed{\sigma(\mathcal{H}) = \{\emptyset, \Omega\}.}$$

- Si $\mathcal{H} = \{A\}$ ou bien si $\mathcal{H} = \{A^c\}$ où $A \neq \emptyset$ et $A \neq \Omega$, alors
$$\boxed{\sigma(\mathcal{H}) = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}.}$$

- Soient $\Omega = \{a, b, c\}$, $\mathcal{H} = \{\{a\}; \{b\}\}$; on peut décrire la tribu engendrée par $\mathcal{H}$:
$$\boxed{\sigma(\mathcal{H}) = \left\{ \underbrace{\Omega}_{\Omega \in \text{tribu}} ;\emptyset; \underbrace{\{a\} \quad ; \{b\}}_{\text{les éléments de } \mathcal{H}} ; \underbrace{\{b, c\}}_{\{a\}^c} ; \underbrace{\{a, c\}}_{\{b\}^c} ; \underbrace{\{a, b\}}_{\{a\} \cup \{b\}} ; \underbrace{\{c\}}_{(\{a\} \cup \{b\})^c} \right\}.}$$

Tribu engendrée

Propriétés.

Soient $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{P}(\Omega)$ et $\mathcal{H}_2 \subset \mathcal{P}(\Omega)$.

1. $\mathcal{H}_1 \subset \sigma(\mathcal{H}_1)$.

   $\rightsquigarrow$ Par définition de $\sigma(\mathcal{H}_1)$.

2. Si $\mathcal{T}$ est une tribu contenant $\mathcal{H}$ alors $\sigma(\mathcal{H}) \subset \mathcal{T}$.

   $\rightsquigarrow$ Par définition de $\sigma(\mathcal{H})$.

3. Si $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2$ alors $\sigma(\mathcal{H}_1) \subset \sigma(\mathcal{H}_2)$.

   $\rightsquigarrow$ $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2 \subset \sigma(\mathcal{H}_2)$.
   $\rightsquigarrow$ $\sigma(\mathcal{H}_2)$ est une tribu.
   $\rightsquigarrow$ Donc $\sigma(\mathcal{H}_2)$ est une tribu qui contient $\mathcal{H}_1$ et comme $\sigma(\mathcal{H}_1)$ est la plus petite tribu contenant $\mathcal{H}_1$ alors

   $$\sigma(\mathcal{H}_1) \subset \sigma(\mathcal{H}_2).$$

Tribu borélienne

Si l'ensemble Ω possède une structure topologique, la notion de tribu engendrée permet de définir la plus petite tribu adaptée à cette structure.

- **Définition** : Soit (Ω, d) un espace métrique. On appelle tribu borélienne de Ω, la tribu engendrée par les ouverts de (Ω, d). On la note $\mathfrak{B}(\Omega)$ et ses éléments sont appelés les boréliens de Ω.

- **Définition** : La tribu borélienne sur $\mathbb{R}$ (respectivement $\overline{\mathbb{R}}$) est la tribu engendrée par les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$.

- $\mathcal{T}$ définit une topologie sur Ω si $\Omega \in \mathcal{T}$, $\emptyset \in \mathcal{T}$, la stabilité par union finie ou infinie et par intersection finie est vérifiée.
- (Ω, d) est un espace métrique lorsque Ω est muni d'une distance $d : \Omega \to \mathbb{R}^+$ vérifiant les propriétés suivantes 1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, 2. $d(x, y) = d(y, x)$ et 3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Tribu borélienne

Exemple.

$[1;2[\, \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, en effet, $[1;2[\, = \,]1;2[\, \cup \{1\}$ et

◇ $]1;2[\, \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$,

◇ $\{1\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\left]1 - \frac{1}{n} ; 1 + \frac{1}{n}\right[}_{A_n \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})}$.

Application mesurable

La notion de fonctions mesurables étend la notion de fonctions continues. Elle prend son sens sur des ensembles munis d'une tribu et joueront un rôle important dans l'intégration au sens de Lebesgue.

On appelle espace mesurable tout couple $(\Omega, \mathcal{T})$ formé par un ensemble Ω et une tribu $\mathcal{T}$ sur Ω.

Les ensembles mesurables sont les parties de Ω qui appartiennent à $\mathcal{T}$: A est mesurable si $A \in \mathcal{T}$.

Applications mesurables

Soient $(\Omega_1, \mathcal{T}_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{T}_2)$ deux espaces mesurables. Soit $f : \Omega_1 \to \Omega_2$.

Application mesurable

On dit que f est $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$-mesurable si l'image réciproque de tout élément de $\mathcal{T}_2$ par f appartient à $\mathcal{T}_1$:

$$\forall \mathrm{B} \in \mathcal{T}_2, \quad f^{-1}(\mathrm{B}) \in \mathcal{T}_1.$$

Quand il n'y a pas de confusion possible, on dit que f est mesurable.

Application borélienne

Soient (Ω_1, d) et (Ω_2, δ) deux espaces métriques et soit $f : \Omega_1 \to \Omega_2$. Si f est $(\mathfrak{B}(\Omega_1), \mathfrak{B}(\Omega_2))$-mesurable, on dit que f est borélienne.

$f^{-\mathbf{1}}(\mathrm{B}) = \{x \in \Omega_{\mathbf{1}}, \quad f(x) \in \mathrm{B}\}$.

Exemple.

Si f est une fonction constante alors f est mesurable, en effet :

$$\forall x \in \Omega_1, f(x) = y_0, \quad \text{où} \quad y_0 \in \Omega_2.$$

Soit $\mathrm{B} \in \mathcal{T}_Y$ alors $f^{-1}(\mathrm{B}) = \{x \in \Omega_1,\ y_0 \in \mathrm{B}\} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \ y_0 \notin \mathrm{B} \\ \Omega_1 & \text{si } \ y_0 \in \mathrm{B} \end{cases}$

Puisque $\mathcal{T}_1$ est une tribu sur Ω_1 alors $\Omega_1 \in \mathcal{T}_1$ et $\emptyset \in \mathcal{T}_1$, ainsi

$$f^{-1}(\mathrm{B}) \in \mathcal{T}_1.$$

La fonction constante est donc mesurable.

Propriétés.

1. Soit $f:(\Omega_1,\mathcal{T}_1)\to(\Omega_2,\mathcal{T}_2)$. Si $\mathcal{T}_2=\sigma(\mathcal{C}_2)$ alors f est mesurable si et seulement si
$$\forall B\in\mathcal{C}_2,\quad f^{-1}(B)\in\mathcal{T}_1.$$
Démonstration – Voir Notes de cours.

2. Soient $(\Omega,\mathcal{T})$ un espace mesurable et A une partie de Ω.
La fonction indicatrice 1_A est mesurable si et seulement si $A\in\mathcal{T}$.
Démonstration – Voir TD 1.

3. Soient $(\Omega_1,\mathcal{T}_1)$, $(\Omega_2,\mathcal{T}_2)$ et $(\Omega_3,\mathcal{T}_3)$ des espaces mesurables. Soient
$$f:\Omega_1\to\Omega_2 \text{ une fonction } (\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2)\text{-mesurable}$$
$$g:\Omega_2\to\Omega_3 \text{ une fonction } (\mathcal{T}_2,\mathcal{T}_3)\text{-mesurable}$$
alors $g\circ f$ est $(\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_3)$-mesurable.
$\rightsquigarrow$ Démonstration – Voir TD 1.

Application mesurable

Corollaire

Si f est continue alors f elle est borélienne.

Mise en garde

Attention : la réciproque est fausse. Voir exemple (*).

Si $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ avec Ω_1 et Ω_2 munis respectivement d'une structure topologique T_1 et T_2, alors on dit que f est continue si $f^{-1}(\underbrace{O_2}_{\in T_2}) \in T_1$.

Opérations sur les fonctions mesurables numériques

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable, $f, g : (\Omega, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ des fonctions mesurables et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$f+g, \quad fg, \quad \lambda f, \quad \min(f,g), \quad \max(f,g).$$

sont mesurables.

Démonstrations – Voir Notes de cours.

Conséquences

- Soient $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ des fonctions mesurables, alors

$$\inf_n f_n, \quad \sup_n f_n, \quad \liminf_n f_n \quad \text{et} \quad \limsup_n f_n$$

sont mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable, alors $|f|$ est une fonction mesurable.

Démonstrations – TD 1.

Proposition

Soit $(U_n)_n$ une suite finie ou infinie d'éléments disjoints deux à deux dans $\mathcal{T}_1$ telle que $\Omega_1 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Soit $f : \Omega_1 \to \Omega_2$, alors f est $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$-mesurable si et seulement si $f_{|U_n}$ (restriction de f à U_n) est $(\mathcal{T}_{U_n}, \mathcal{T}_2)$-mesurable pour tout n.

Exemple*.

$\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{R}$, $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2 = \mathfrak{B}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} f:\quad & \Omega_1 \to \Omega_2 \\ & x \mapsto f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } \; x \neq 0 \\ 1 & \text{si } \; x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On note $U_0 =]-\infty; 0[$, $U_1 = \{0\}$ et $U_2 =]0; +\infty[$.

- $]-\infty; 0[$ est ouvert $\Rightarrow U_0 \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$.
- $\{0\}$ est fermé $\Rightarrow U_1 \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$.
- $]0; +\infty[$ est ouvert $\Rightarrow U_2 \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$.
- $U_0 \cup U_1 \cup U_2 = \mathbb{R}$.
- $f_{|\mathrm{U}_0}$ est continue $\Rightarrow f$ est $(\mathcal{T}_{U_0}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$-mesurable.
- $f_{|U_1}$ est constante $\Rightarrow f$ est $(\mathcal{T}_{\{0\}}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$-mesurable.
- $f_{|\mathrm{U}_2}$ est continue $\Rightarrow f$ est $(\mathcal{T}_{U_2}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$-mesurable.

f est donc $(\mathfrak{B}(\mathbb{R}), \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$-mesurable.