$1^{\text{ère}}$ année Ingénieurs - Mathématiques appliquées
Rattrapage : Mesure et Intégration

L'usage de tout appareil électronique est interdit	*Date :* **la semaine du 17/02/2025** *Durée :* **2h** *Nombre de pages :* **2**

Téléphones portables, calculatrice et tout document sont interdits. Les élèves sont invités à porter une attention particulière à la rédaction. La référence des questions doit obligatoirement être mentionnée.

♣ ♣ ♣

Exercice 1.

On rappelle les deux points suivants :

• Un ensemble E est dit discret, si et seulement si, E est fini ou E est dénombrable.

• Un ensemble E est dit non-discret, si et seulement si, E est infini et non-dénombrable.

Soit $\mathcal{F}$ le sous-ensemble de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ (où $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$), défini par

$$\mathcal{F} = \Big\{ A \subset \mathbb{R} \ : \ A \text{ est discret ou } \ A^c \text{ est discret} \Big\}$$

1. Montrer que $(\mathbb{R}, \mathcal{F})$ est un espace mesurable.
2. Pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, on pose

$$\nu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est discret} \\ 1 & \text{si } A \text{ est non-discret} \end{cases}$$

   (a) Montrer que ν est une mesure positive sur $(\mathbb{R}, \mathcal{F})$.
   (b) Est-ce que ν définit une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$? justifier.

Exercice 2.

Dans cet exercice, λ désigne la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = e^{-n \sin^2 x} \ \frac{1}{x^2+1} \ \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est borélienne.
2. Etudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_n$.

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_n = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\ d\lambda(x)$

   (a) En utilisant le théorème de la convergence dominée, déterminer, en justifiant, la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (b) Citer et vérifier les conditions d'application du théorème de la convergence monotone pour les suites décroissantes. Déterminer ensuite la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3. Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. Soient $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ des réels strictement positifs et $x_1, x_2, ..., x_k$ des éléments de X, distincts deux à deux. Soit $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{T}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mesurable et positive. On définit l'application $m : \mathcal{T} \to \overline{\mathbb{R}}$ par :

$$\forall A \in \mathcal{T}, \quad m(A) = \int_A \varphi d\mu + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \delta_{x_i}(A)$$

où δ_a est la mesure de Dirac concentrée en a, avec $a \in X$.
On admettra dans toute la suite de l'exercice que, si $f : X \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable, alors

$$\int_X f d\delta_a = f(a), \quad \forall a \in X$$

1. Montrer que m est une mesure positive sur $(X, \mathcal{T})$.
2. Montrer que si φ est μ-intégrable, alors m est finie.
3. Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{T}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mesurable et positive.

   (a) Démontrer, en justifiant avec soin tous les calculs, que

   $$\int_X f dm = \int_X f\varphi d\mu + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(x_i)$$

   Attention, distinguer trois cas :
   (i) f est une fonction indicatrice mesurable.
   (ii) f est une fonction étagée positive.
   (iii) f est une fonction mesurable positive quelconque.

   (b) Montrer que la fonction f est m-intégrable si et seulement si la fonction $f\varphi$ est μ-intégrable.

4. Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{T}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mesurable et de signe variable.

   (a) Montrer que la fonction f est m-intégrable si et seulement si la fonction $f\varphi$ est μ-intégrable.

   (b) On suppose que la fonction f est m-intégrable. Montrer que

   $$\int_X f dm = \int_X f\varphi d\mu + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(x_i)$$