

Corrigé de mesure et intégration

Exercice 1 (7 points) :

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable, $f : (\Omega, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ une application $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ -mesurable. On considère m_1 et m_2 deux mesures positives sur $(\Omega, \mathcal{T})$. On définit la fonction, $m : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ pour tout $A \in \mathcal{T}$ par

$$m(A) = \alpha_1 \int_A f dm_1 + \alpha_2 \int_A f dm_2$$

où $\alpha_1 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha_2 \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que $(\Omega, \mathcal{T}, m)$ est un espace mesuré.
2. Montrer que m est une mesure finie si et seulement si $\forall i = 1, 2$, f est m_i -intégrable sur Ω .
3. Soit $A \in \mathcal{T}$. Montrer que $m_1(A) = 0$ et $m_2(A) = 0 \implies m(A) = 0$.
4. Soit $g : (\Omega, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une application $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -mesurable et positive.

(a) Montrer que

$$\int_{\Omega} g dm = \alpha_1 \int_{\Omega} f g dm_1 + \alpha_2 \int_{\Omega} f g dm_2.$$

(b) En déduire que g est m -intégrable si et seulement si $f g$ est m_i -intégrable pour $i = 1, 2$.

5. Soit $g : (\Omega, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une application $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -mesurable de signe quelconque.

(a) Montrer que g est m -intégrable si et seulement si $f g$ est m_i -intégrable pour $i = 1, 2$.

(b) Supposons que g est m -intégrable. Montrer que

$$\int_{\Omega} g dm = \alpha_1 \int_{\Omega} f g dm_1 + \alpha_2 \int_{\Omega} f g dm_2.$$

① $f : (\Omega, \mathcal{T}) \longrightarrow (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$

$$\forall A \in \mathcal{T}, m(A) = \alpha_1 \int_A f dm_1 + \alpha_2 \int_A f dm_2$$

$$= \alpha_1 \int_{\Omega} f \chi_A dm_1 + \alpha_2 \int_{\Omega} f \chi_A dm_2 \geq 0$$

$$\begin{aligned} m(\emptyset) &= \alpha_1 \int_{\Omega} f \chi_{\emptyset} dm_1 + \alpha_2 \int_{\Omega} f \chi_{\emptyset} dm_2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

- $(A_n) \in \mathcal{T}, \quad A_n \cap A_m = \emptyset \quad m \neq n$

$$me\left(\bigcup_n A_n\right) = \alpha_1 \int_{\Omega} f \chi_{\bigcup_n A_n} dme_1 + \alpha_2 \int_{\Omega} f \chi_{\bigcup_n A_n} dme_2$$

$$= \alpha_1 \int_{\Omega} \sum_{n \geq 0} f \chi_{A_n} dme_1 + \alpha_2 \int_{\Omega} \sum_{n \geq 0} f \chi_{A_n} dme_2$$

$f \chi_{A_n}$ est une fonction mesurable positive

d'après le théorème d'intégration d'une série des fonctions mesurables positives

$$\begin{aligned} me\left(\bigcup_n A_n\right) &= \sum_n \left(\alpha_1 \int_{\Omega} f \chi_{A_n} dme_1 + \alpha_2 \int_{\Omega} f \chi_{A_n} dme_2 \right) \\ &= \sum_n me(A_n) \end{aligned}$$

donc me est une mesure positive sur Ω .

② me est finie $\Leftrightarrow f$ est me_i -intégrable $i=1,2$

$$me(\Omega) = \alpha_1 \int_{\Omega} f dme_1 + \alpha_2 \int_{\Omega} f dme_2 < +\infty$$

comme $\int_{\Omega} f dme_i \geq 0$ et $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow \forall i=1,2, \quad \alpha_i \int_{\Omega} f dme_i < +\infty$$

$$\Leftrightarrow \forall i=1,2 \quad \int_{\Omega} f d\mu_i < +\infty$$

$$\Leftrightarrow \forall i=1,2, f \text{ est } \mu_i\text{-intégrable}$$

(3) soit $A \in \mathcal{T}$, $\forall i=1,2, \mu_i(A) = 0 \Rightarrow$

$$\int_A f d\mu_i = 0 \quad \text{car } A \text{ est } \mu_i\text{-négligeable et } f \text{ mesurable positive.}$$

$$\Rightarrow \mu(A) = \alpha_1 \int_A f d\mu_1 + \alpha_2 \int_A f d\mu_2 = 0$$

(4)

(a)

1er cas $\gamma: \mathcal{F} = \sum_{i=1}^n b_i \chi_{B_i} \in \mathcal{E}^+(\Omega, \mathcal{T})$

$B_i \in \mathcal{T}, (B_i)_{i=1}^n$ disjoints deux à deux, $b_i \geq 0$

$$\int_{\Omega} g d\mu = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n b_i \chi_{B_i} d\mu$$

$$= \sum_{i=1}^n b_i \mu(B_i)$$

$$= \sum_{i=1}^n b_i \left(\alpha_1 \int_{B_i} f d\mu_1 + \alpha_2 \int_{B_i} f d\mu_2 \right)$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(b_i \alpha_1 \int_{B_i} f d\mu_1 \right) + \sum_{i=1}^n \left(b_i \alpha_2 \int_{B_i} f d\mu_2 \right)$$

$$= \alpha_1 \int_{B_i} \left(\sum_{i=1}^n b_i f \right) d\mu_1 + \alpha_2 \int_{B_i} \left(\sum_{i=1}^n b_i f \right) d\mu_2$$

$$= \alpha_1 \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n b_i \chi_{B_i} \right) f d\mu_1 + \alpha_2 \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n b_i \chi_{B_i} \right) f d\mu_2$$

$$= \alpha_1 \int_{\Omega} g f d\mu_1 + \alpha_2 \int_{\Omega} g f d\mu_2$$

2ème cas

$g \in \mathcal{L}^+(\Omega, T)$ alors $\exists (g_n)_n \in \mathcal{E}^+(\Omega, T)$

croissante telle que $g_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} g$

$$\int_{\Omega} g d\mu = \int_{\Omega} \lim_n \uparrow g_n d\mu =$$

$$= \lim_n \uparrow \int_{\Omega} g_n d\mu \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{théorème de la convergence} \\ \text{monotone} \end{array} \right.$$

d'après le 1er cas

$$= \lim_n \uparrow \left(\alpha_1 \int_{\Omega} g_n f d\mu_1 + \alpha_2 \int_{\Omega} g_n f d\mu_2 \right)$$

$$= \alpha_1 \lim_n \uparrow \int_{\Omega} g_n f d\mu_1 + \alpha_2 \lim_n \uparrow \int_{\Omega} g_n f d\mu_2$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{théorème de la convergence} \\ \text{monotone} \end{array} \right.$

$$= \alpha_1 \int_{\Omega} (\lim_n \uparrow f_n) f d\mu_{e_1} + \alpha_2 \int_{\Omega} (\lim_n \uparrow f_n) f d\mu_{e_2}$$

$$= \alpha_1 \int_{\Omega} g f d\mu_{e_1} + \alpha_2 \int_{\Omega} g f d\mu_{e_2}$$

⑥ $\int_{\Omega} g f d\mu < +\infty \Leftrightarrow$

$$\alpha_1 \int_{\Omega} g f d\mu_{e_1} + \alpha_2 \int_{\Omega} g f d\mu_{e_2} < +\infty \Leftrightarrow$$

$\alpha_i > 0$

$$\Leftrightarrow \forall i=1,2 \quad \alpha_i \int_{\Omega} g f d\mu_{e_i} < +\infty$$

$$\Leftrightarrow \forall i=1,2, \quad g f \text{ est } \mu_{e_i}\text{-intégrable}$$

⑤

⑦ $\int_{\Omega} g d\mu < +\infty \Leftrightarrow \begin{cases} \int_{\Omega} g^+ d\mu < +\infty \\ \int_{\Omega} g^- d\mu < +\infty \end{cases}$

où $g^+ = \sup(g, 0) \geq 0$, $g^- = \sup(-g, 0) \geq 0$

d'après 4 ⑥

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \int_{\Omega} g^+ f d\mu_{e_i} < +\infty & \forall i=1,2 \\ \int_{\Omega} g^- f d\mu_{e_i} < +\infty & \forall i=1,2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \int_{\Omega} g f d\mu_{e_i} < +\infty \quad \forall i=1,2$$

⑦

$$\text{soit } \int_{\Omega} g \, d\mu < +\infty$$

$$\int_{\Omega} g \, d\mu = \int_{\Omega} (g^+ - g^-) \, d\mu = \int_{\Omega} g^+ \, d\mu - \int_{\Omega} g^- \, d\mu$$

d'après ④ a

$$= \alpha_1 \int_{\Omega} g^+ f \, d\mu_1 + \alpha_2 \int_{\Omega} g^+ f \, d\mu_2$$

$$- \alpha_1 \int_{\Omega} g^- f \, d\mu_1 - \alpha_2 \int_{\Omega} g^- f \, d\mu_2$$

$$= \alpha_1 \left(\int_{\Omega} g^+ f \, d\mu_1 - \int_{\Omega} g^- f \, d\mu_1 \right) +$$

$$+ \alpha_2 \left(\int_{\Omega} g^+ f \, d\mu_2 - \int_{\Omega} g^- f \, d\mu_2 \right)$$

d'après ⑤ a

$$= \alpha_1 \int_{\Omega} (g^+ - g^-) f \, d\mu_1 + \alpha_2 \int_{\Omega} (g^+ - g^-) f \, d\mu_2$$

$$= \alpha_1 \int_{\Omega} g f \, d\mu_1 + \alpha_2 \int_{\Omega} g f \, d\mu_2$$

Exercice 2 (4 points) : Soit f la fonction définie par $f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$.

1. Montrer que f est une fonction mesurable.
2. Montrer que f est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Vérifier que $\forall x > 0$, $f(x) = \frac{xe^{-x}}{1 - e^{-x}}$.

4. Montrer que $\forall x > 0$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} xe^{-nx}$.

5. En déduire, en justifiant votre démarche, que $\int_{\mathbb{R}_+^*} f d\lambda = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

① $\forall x > 0, f(x) = \frac{x}{e^x - 1} > 0$

f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, alors f est mesurable

2) on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{x}{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - 1} =$
 $= \frac{1}{1 + \frac{1}{2}x + o(x)} = 1$

f est prolongeable par continuité en $x=0$

$$\int_0^a f dx < +\infty \quad \forall a > 0$$

on a aussi: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} = 0$

donc d'après le lemme de Riemann

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx < +\infty$$

donc $\int_0^{+\infty} f(x) dx < +\infty$ et Riemann intégrable

alors $\int_{\mathbb{R}_+^*} f(x) d\lambda(x) < +\infty$ et Lebesgue intégrable

$$\text{et } \int_{\mathbb{R}_+^*} f(x) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}_+^*} f(x) dx$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad \forall x > 0, \quad f(x) &= \frac{x}{e^x(1 - e^{-x})} & e^x > 1 \\ &= \frac{x e^{-x}}{1 - e^{-x}} \end{aligned}$$

$$\textcircled{4} \quad \text{on a } \forall x > 0, \quad e^x > 1 \Rightarrow 0 < e^{-x} < 1$$

$$\text{donc } \frac{1}{1 - e^{-x}} = \sum_{n \geq 0} e^{-nx} \quad \text{série géométrique}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n \geq 0} x e^{-x - nx}$$

$$= \sum_{n \geq 0} x e^{-(n+1)x} \quad n+1 = m$$

$$= \sum_{m=1}^{+\infty} x e^{-mx}$$

$$\textcircled{5} \quad \int_{\mathbb{R}_+^*} f(x) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}_+^*} \sum_{n=1}^{+\infty} x e^{-nx} d\lambda(x)$$

Comme $x e^{-nx} > 0$, continue et mesurable sur $\mathbb{R}_+^*$
 d'après le théorème d'intégration d'une série des
 fonctions mesurables positives

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^*} f(x) d\lambda(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}_+^*} x e^{-nx} d\lambda(x) \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} x e^{-nx} dx \right) \\ &\stackrel{\text{IPP}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left[x \left(-\frac{1}{n} e^{-nx} \right) \right]_0^{+\infty} - \frac{1}{n^2} \left[e^{-nx} \right]_0^{+\infty} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\varepsilon}{n} e^{-n\varepsilon} - \frac{1}{n^2} e^{-n\varepsilon} \right) + \frac{1}{n^2} \right] = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

Exercice 3 (6 points – Les questions 1 et 2 sont indépendantes) :

1. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{3}{e^x + x^n} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x).$$

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est mesurable.

(b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(c) En justifiant vos calculs, calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) d\lambda(x)$.

2. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \left(1 - \frac{3x}{n} \right)^{n+1} \mathbf{1}_{\left[0; \frac{n}{3}\right]}(x).$$

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est mesurable.

(b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(c) En justifiant vos calculs, calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) d\lambda(x)$.

① $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = \frac{3}{e^x + x^n} \chi_{\mathbb{R}_+^*}(x)$

② ① $\frac{3}{e^x + x^n}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$

donc elle est mesurable sur $\mathbb{R}_+^*$.

② $\chi_{\mathbb{R}_+^*}$ est une mesurable car $\mathbb{R}_+^*$ est mesurable.

③ f_n est nulle sur $\mathbb{R}_-$ donc elle est mesurable sur $\mathbb{R}_-$.

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n$ est mesurable sur $\mathbb{R}$.

③ Pour $0 < x < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 3e^{-x}$

Pour $x > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$

Pour $x = 1$, $f_n(x) = \frac{3}{e^3 + 1}$

Soit $f(x) = 3e^{-x} \chi_{]0,1[}(x)$

donc $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{c.v} f(x)$ λ -p.p

car $\{1\} = \{x \in \mathbb{R} / f_n \not\rightarrow f\}$ est λ -négligeable

④ Domination $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*,$

$\forall x > 0 \quad |f_n(x)| = \frac{3}{e^x + x^n} < 3e^{-x}, \quad x^n > 0$

$\forall x \leq 0 \quad |f_n(x)| = 0$

donc $|f_n(x)| \leq 3 e^{-x} \chi_{\mathbb{R}_+^*}(x) = g(x)$

où
$$\int_{\mathbb{R}} 3 e^{-x} \chi_{\mathbb{R}_+^*} d\lambda = 3 \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 3 \left[e^{-x} \right]_0^{+\infty}$$

$$= 3 \left(1 - \lim_{\varepsilon \rightarrow +\infty} e^{-\varepsilon} \right) = 3$$

donc g est λ -intégrable sur $\mathbb{R}$

D'après le théorème de la convergence dominée

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 3 \int_0^1 e^{-x} dx$$

$$= 3 \left[e^{-x} \right]_1^0 = 3(1 - e^{-1})$$

② $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) = \left(1 - \frac{3x}{n} \right)^{n+1} \chi_{\left[0, \frac{n}{3}\right]}(x)$

① $\left(1 - \frac{3x}{n} \right)^{n+1}$ est une fonction continue sur $\left[0, \frac{n}{3}\right]$

donc elle est mesurable sur $\left[0, \frac{n}{3}\right]$

② $\chi_{\left[0, \frac{n}{3}\right]}$ est une mesurable car $\left[0, \frac{n}{3}\right]$ est mesurable.

③ f_n est nulle sur $\mathbb{R} \setminus \left[0, \frac{n}{3}\right]$ donc elle est mesurable sur $\mathbb{R} \setminus \left[0, \frac{n}{3}\right]$.

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n$ est mesurable sur $\mathbb{R}$.

⑥ Pour $x \geq 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = e^{-3x}$

Pour $x < 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$

Soit $f(x) = e^{-3x} \chi_{\mathbb{R}_+}(x)$

donc $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{c.v.} f(x)$

⑦ Dominaton $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad 0 < 1 - \frac{3x}{n} \leq e^{-\frac{3x}{n}} < e^{-\frac{3x}{n+1}}$

$\Rightarrow f_n(x) = \left(1 - \frac{3x}{n}\right)^{n+1} < e^{-3x}$

$\forall x \in \mathbb{R}_- , f_n(x) = 0$

donc $\forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x)| \leq f(x)$

où $\int_{\mathbb{R}} e^{-3x} \chi_{\mathbb{R}_+} dx = \int_0^{+\infty} e^{-3x} dx = \frac{1}{3} \left[e^{-3x} \right]_{+\infty}^0$
 $= \frac{1}{3} \left(1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-3x} \right) = \frac{1}{3}$

donc f est λ -intégrable sur $\mathbb{R}$

D'après le théorème de la convergence dominée

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-3x} dx = \frac{1}{3}$$

Exercice 4 (3 points) :

Soit $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \lambda \otimes \lambda)$ un espace mesure où $\lambda \otimes \lambda$ est le produit des mesures de Lebesgue. Soit

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0; y \geq 0 \text{ et } x + y \leq 1\}$$

et $f(x, y) = \exp\left(y - \frac{1}{2}y^2\right)$ l'expression de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

2. On note $I = \int_D f(x, y) d\lambda \otimes \lambda(x, y)$.

(a) Justifier pourquoi le théorème de Fubini-Tonelli est applicable pour évaluer I .

(b) Calculer $I = \int_0^1 \int_0^{1-x} f(x, y) d\lambda(y) d(x)$.

① on a

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$$

$$= g_1^{-1}([0, +\infty[) \cap g_2^{-1}([0, +\infty[) \cap g_3^{-1}(]-\infty, 1])$$

où $g_1(x, y) = x$, $g_2(x, y) = y$, $g_3(x, y) = x + y$

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Comme g_1 , g_2 et g_3 sont continues

alors elles sont mesurables et comme

$[0, +\infty[$, $]-\infty, 1] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ alors

$$g_1^{-1}([0, +\infty[), g_2^{-1}([0, +\infty[), g_3^{-1}(]-\infty, 1]) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$$

donc $\mathcal{D} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

② on a $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) > 0$

et $f(x, y) = \exp(y - \frac{1}{2}y^2)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc elle est mesurable sur $\mathbb{R}^2$.

donc on peut appliquer le théorème de Fubini-Tonelli

$$\text{sur } I = \int_{\mathcal{D}} f(x, y) d\lambda \otimes \lambda(x, y)$$

⑥ d'après le théorème de

Fubini-Tonelli

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-x} f(x, y) d\lambda(y) d\lambda(x)$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-y} \exp(y - \frac{1}{2}y^2) dx dy$$

$$= \int_0^1 (1-y) \exp(y - \frac{1}{2}y^2) dy = \left[\exp(y - \frac{1}{2}y^2) \right]_0^1$$

$$= e^{\frac{1}{2}} - 1$$

