CY-Tech - Département Mathématiques

$1^{\text{ère}}$ année Ingénieurs - Génie Mathématique

Examen : Mesure & intégration
Donné le 13-01-2021 (Durée 2h00)

Téléphones portables et tout document sont interdits

Le barème est donné à titre indicatif. Les élèves sont invités à porter une attention particulière à la rédaction et à la justification des réponses.

La référence des questions doit obligatoirement être mentionnée.

EXERCICE 1 (3 points) Soient $(\Omega, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré et Δ un élément fixe de $\mathscr{T}$.

1. Justifier que l'application donnée par :

$$\forall B \in \mathscr{T}, \quad \widetilde{\mu}(B) = \mu(B \cap \Delta)$$

   est une mesure sur $(\Omega, \mathscr{T})$ et que $\widetilde{\mu}(B) \leq \mu(B)$.

2. A quelle condition portant sur $\mu(\Delta)$, $\widetilde{\mu}$ est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathscr{T})$?

3. Montrer que toute partie de Ω de mesure nulle par rapport à μ est également une partie de mesure nulle par rapport à $\widetilde{\mu}$.

4. On suppose dans cette question **uniquement** que μ est la mesure de comptage sur $(\Omega, \mathscr{T})$.

   Montrer que s'il existe $a \in \Omega$ tel que $\Delta = \{a\}$ alors $\widetilde{\mu}$ est la mesure de Dirac centrée au point a, $\widetilde{\mu} = \delta_a$.

EXERCICE 2 (6 points) Soit $(\Omega, \mathscr{T})$ un espace mesurable. On considère $\mathbf{m}_1$ et $\mathbf{m}_2$ deux mesures sur $(\Omega, \mathscr{T})$.

1. Montrer que $\mathbf{m} = \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2$ est une mesure sur $(\Omega, \mathscr{T})$.

2. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application mesurable. Montrer que f est $\mathbf{m}$-intégrable si et seulement si f est $\mathbf{m}_1$-intégrable et $\mathbf{m}_2$-intégrable et montrer que

$$\int_\Omega f\, d\mathbf{m} = \int_\Omega f\, d\mathbf{m}_1 + \int_\Omega f\, d\mathbf{m}_2.$$

   <u>Indication :</u> distinguer le cas où f est une fonction étagée positive, une fonction mesurable positive puis une fonction mesurable de signe quelconque.

3. **Application:**

   Soit $A = \{-1, 2, 3\}$ et $f : (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ une application mesurable telle que $f(3) = -2f(2)$.

   On pose $\mathbf{m}_1 = \delta_2$ la mesure de Dirac concentrée en 2, $\mathbf{m}_2$ la mesure de comptage et $\mathbf{m} = \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2$.

   (a) Montrer que $f\mathbf{1}_A$ est $\mathbf{m}$-intégrable.

   (b) Calculer $\displaystyle\int_A f\, d\mathbf{m}$.

EXERCICE 3 (4 points) Soient $(\Omega, \mathscr{T}, \mu)$ et $(\mathbb{R}^+, \mathscr{B}(\mathbb{R}^+), \lambda)$ deux espaces mesurés où μ est une mesure **finie** sur Ω et λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^+$. On considère l'application mesurable

$$f : (\Omega, \mathscr{T}, \mu) \to (\mathbb{R}^+, \mathscr{B}(\mathbb{R}^+), \lambda).$$

On suppose que $\int_\Omega f^2 d\mu < +\infty$.

1. Rappeler la définition d'une mesure finie.
2. Rappeler la définition d'une mesure σ-finie. (Mesure sigma finie)
3. Montrer que si μ est une mesure finie alors elle est σ-finie. La réciproque est-elle vraie ? Justifier par une démonstration si la proposition est vraie ou par un contre exemple le cas échéant.
4. Soient $A_1 = \{x \in \Omega,\ \ 0 \leq f(x) \leq 1\}$ et $A_2 = \{x \in \Omega,\ \ f(x) > 1\}$.
   (a) Montrer que A_1 et A_2 sont deux ensembles mesurables, $A_1 \in \mathscr{T}$ et $A_2 \in \mathscr{T}$.
   (b) Montrer que $\int_{A_1} f d\mu < +\infty$.
   (c) Montrer que $\int_{A_2} f d\mu < +\infty$.
   (d) Que peut-on déduire sur l'intégrabilité de f sur Ω? Justifier.

EXERCICE 4 (3 points) Soit l'espace mesuré $(\mathbb{R}^+, \mathscr{B}(\mathbb{R}^+), \lambda)$ où λ est la mesure de Lebesgue. Calucler en justifiant toutes les étapes de vos calculs:

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{[0,n]} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \cos(x) d\lambda(x).$$

EXERCICE 5 (4 points) Sur $\mathbb{R}^2$, on définit l'ensemble $D = \{(x, y) \in [0,1] \times [0,1]\ \text{ tel que }\ x + y \leq 1\}$.

1. Montrer que D est un borélien de $\mathbb{R}^2$.
2. Soit
$$\begin{array}{rccl} f & : & [0,1] \times [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & & (x, y) & \mapsto & e^{-(x+y)} \mathbf{1}_D(x, y). \end{array}$$
   (a) Montrer que la fonction f est mesurable.
   (b) Calculer, en justifiant votre réponse, $\int_{[0,1]\times[0,1]} f(x, y)\, \lambda \otimes \lambda (dx, dy)$.