

Corrigé ex 1

0,25 1. $\tilde{\mu} : \mathcal{C} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ donc $\tilde{\mu}$ est 1 fct d'ensembles positive

0,5 • $\tilde{\mu}(\emptyset) = \mu(\emptyset \cap \Delta) = \mu(\emptyset) = 0$ car μ mes.

• $(B_n)_n \in \mathcal{C}^N$ disj. 2a 2

$$\tilde{\mu}(\bigcup_n B_n) = \mu((\bigcup_n B_n) \cap \Delta) = \mu(\bigcup_n (B_n \cap \Delta))$$

0,5

$$i \neq j \Rightarrow B_i \cap B_j = \emptyset \Rightarrow (B_i \cap \Delta) \cap (B_j \cap \Delta) = \emptyset$$

donc $(B_n \cap \Delta)_n$ disj. 2a 2.

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(\bigcup_n B_n) &= \mu(\bigcup_n (B_n \cap \Delta)) = \sum_n \mu(B_n \cap \Delta) \text{ car } \mu \text{ } \sigma\text{-addit.} \\ &= \sum_n \tilde{\mu}(B_n). \end{aligned}$$

0,25 $\rightarrow B \cap \Delta \subset B$ donc $\mu(B \cap \Delta) \leq \mu(B)$ par croissance de la mesure
soit $\tilde{\mu}(B) \leq \mu(B)$.

0,5 2. $\tilde{\mu}$ est 1 mes. de probabilité ssi $\tilde{\mu}(\Omega) = 1$ ssi $\mu(\Omega \cap \Delta) = 1$
ssi $\mu(\Delta) = 1$.

0,5 3. $\mu(B) = 0 \Rightarrow 0 \leq \tilde{\mu}(B) \leq \underbrace{\mu(B)}_0$ donc $\tilde{\mu}(B) = 0$

4. $\mu = \mu_a$ $\Delta = \{a\}$

$$\tilde{\mu}(B) = \mu(B \cap \Delta) = \mu_a(B \cap \{a\}) = \begin{cases} \mu_a(\{a\}) & \text{si } a \in B \\ \mu_a(\emptyset) & \text{sinon} \end{cases}$$

0,5

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } a \in B \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \delta_a(B).$$

Corrigé ex 2

0,25 1...m est bien une fonction d'ensembles positive.

0,25 • $m(\emptyset) = m_1(\emptyset) + m_2(\emptyset) = 0 + 0 = 0$ car $m_{1,2}$ mesures.

• Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}^{\mathbb{N}}$ disjoints 2 à 2.

0,5

$$\begin{aligned} m\left(\bigcup_n A_n\right) &= (m_1 + m_2)\left(\bigcup_n A_n\right) \\ &= m_1\left(\bigcup_n A_n\right) + m_2\left(\bigcup_n A_n\right) \\ &= \sum_n m_1(A_n) + \sum_n m_2(A_n) \text{ car } m_{1,2} \text{ } \sigma\text{-add.} \\ &= \sum_n (m_1(A_n) + m_2(A_n)) \text{ car lt est pos. do } \overline{\mathbb{R}}_+ \\ &= \sum_n m(A_n). \end{aligned}$$

2. On distingue 3 cas:

1 1^{er} cas: $f \in \mathcal{E}_+(\mathcal{Q}, \mathcal{C})$ donc $f = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{A_i}$ où $(a_i) \uparrow$ et $A_i \in \mathcal{C}$ ~~mes.~~ disjoints 2 à 2.

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{Q}} f dm &= \sum_{i=1}^n a_i m(A_i) \text{ par déf. de l'int. d'1 fct étagée} \\ &= \sum_{i=1}^n a_i m_1(A_i) + \sum_{i=1}^n a_i m_2(A_i) \end{aligned}$$

$$= \int_{\mathcal{Q}} f dm_1 + \int_{\mathcal{Q}} f dm_2 \text{ par déf.}$$

$$\bullet \int_{\mathcal{Q}} f dm < +\infty \Rightarrow \int_{\mathcal{Q}} f dm_1 < +\infty \text{ et } \int_{\mathcal{Q}} f dm_2 < +\infty$$

car $\int_{\mathcal{Q}} f dm_i \leq \int_{\mathcal{Q}} f dm, i=1,2$

$$\bullet \int_{\mathcal{Q}} f dm_1 < +\infty \text{ et } \int_{\mathcal{Q}} f dm_2 < +\infty \Rightarrow \int_{\mathcal{Q}} f dm < +\infty$$

2^{ème} cas: $f \in \mathcal{L}_+(\mathcal{Q}, \mathcal{C})$ donc $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \uparrow \varphi_n$ où $\varphi_n \in \mathcal{E}_+(\mathcal{Q}, \mathcal{C})$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{Q}} f dm &= \int_{\mathcal{Q}} \lim_n \varphi_n dm = \lim_n \int_{\mathcal{Q}} \varphi_n dm \text{ B.L. de Vi} \\ &\quad \text{car } (\varphi_n) \uparrow + \\ &= \lim_n \left(\int_{\mathcal{Q}} \varphi_n dm_1 + \int_{\mathcal{Q}} \varphi_n dm_2 \right) \text{ \# 1^{er} cas.} \\ &= \lim_n \int_{\mathcal{Q}} \varphi_n dm_1 + \lim_n \int_{\mathcal{Q}} \varphi_n dm_2 \text{ car B.L.} \\ &= \int_{\mathcal{Q}} \lim_n \varphi_n dm_1 + \int_{\mathcal{Q}} \lim_n \varphi_n dm_2 \text{ B.L.} \end{aligned}$$

$$= \int_{\Omega} f \, d m_1 + \int_{\Omega} f \, d m_2$$

• f m -intégrable $\Leftrightarrow f$ m_i -intégrable, $i=1,2$ (m rais. 1^{er} cas)

3^{ème} cas : $f \in L(\Omega, \mathcal{C})$ donc $f = f^+ - f^-$ avec $f^+ \in L_+(\Omega, \mathcal{C})$, $f^- \in L_+(\Omega, \mathcal{C})$

f m -intégrable $\Leftrightarrow \int_{\Omega} f^+ \, d m < +\infty$ et $\int_{\Omega} f^- \, d m < +\infty$ par def.

$$\Leftrightarrow \int_{\Omega} f^+ \, d m_i < +\infty \text{ et } \int_{\Omega} f^- \, d m_i < +\infty \quad (\text{cas 2 } i=1,2)$$

$\Leftrightarrow f$ est m_i -intégrable $i=1,2$.

Ds ce cas :

$$\int_{\Omega} f \, d m = \int_{\Omega} f^+ \, d m - \int_{\Omega} f^- \, d m \quad \text{par def.}$$

$$= \left(\int_{\Omega} f^+ \, d m_1 + \int_{\Omega} f^+ \, d m_2 \right) - \left(\int_{\Omega} f^- \, d m_1 + \int_{\Omega} f^- \, d m_2 \right)$$

car f^+ et f^- mes. +

$$= \int_{\Omega} f \, d m_1 + \int_{\Omega} f \, d m_2$$

3. (a) f est mesurable, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ donc $\mathbb{1}_A$ mesurable

ainsi $f \mathbb{1}_A$ mesurable.

$f \mathbb{1}_A$ est m -intégrable $\Leftrightarrow f \mathbb{1}_A$ est m_i -intégrable $i=1,2$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} |f \mathbb{1}_A| \, d m_i = \int_{\mathbb{R}} |f| \mathbb{1}_A \, d m_i$$

$$\text{or } \int_{\mathbb{R}} |f| \mathbb{1}_A \, d m_i \leq \max_{x \in A} |f(x)| \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A \, d m_i$$

$$\text{car } \forall x \in A, |f(x)| \in \{|f(-1)|; |f(2)|; |f(3)|\}$$

$$\text{donc } \int_{\mathbb{R}} |f \mathbb{1}_A| \, d m_i \leq \max_{x \in A} |f| \, m_i(A)$$

$$\text{comme } m_i(A) = \begin{cases} \delta_2(A) & ; i=1 \\ \mu_d(A) & ; i=2 \end{cases} = \begin{cases} 1 & , i=1 \\ 3 & , i=2 \end{cases}$$

alors $\int_{\mathbb{R}} |f \mathbb{1}_A| \, d m_i < +\infty$ ie $f \mathbb{1}_A$ est m_i -intégrable.

b. D'après la question 2, comme $f \mathbb{1}_A$ est m -intégrable alors

$$\int_{\mathbb{R}} f \mathbb{1}_A d m = \int_{\mathbb{R}} f \mathbb{1}_A d m_1 + \int_{\mathbb{R}} f \mathbb{1}_A d m_2.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} f \mathbb{1}_A d m_1 &= \int_{\mathbb{R}} f \mathbb{1}_A d \delta_2 = \int_{\{-1,3\}} f d \delta_2 + \int_{\{2\}} f d \delta_2 \\ &= 0 + f(2) \delta_2(\{2\}) \\ &= f(2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} f \mathbb{1}_A d m_2 &= \int_{\{-1\}} f(-1) d \mu_d + \int_{\{2\}} f(2) d \mu_d + \int_{\{3\}} f(3) d \mu_d \\ &= f(-1) + f(2) + f(3) \text{ car } \mu_d(\{-1\}) = \mu_d(\{2\}) = \mu_d(\{3\}) = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Finalement, } \int_{\mathbb{R}} f \mathbb{1}_A d m &= f(2) + (f(-1) + f(2) + f(3)) \\ &= 2f(2) + f(-1) - 2f(2) + f(3) = -2f(2) + f(3) \\ &= f(-1). \end{aligned}$$

Corrigé exercice 3.

1. μ est une mesure finie sur $\mathcal{L}$ ssi :

$$\begin{cases} \mu \text{ fct d'ens. +} \\ \mu(\emptyset) = 0 \\ \mu(\cup A_n) = \sum \mu(A_n), A_n \in \mathcal{L} \text{ disj. } \end{cases}$$

0,25

2. μ est une mesure σ -finie sur $(\mathcal{L}, \mathcal{E})$ ssi :

0,25

- μ une mesure sur $(\mathcal{L}, \mathcal{E})$
- $\exists (A_n)_n \in \mathcal{E}^{\mathbb{N}}$ tq $\mathcal{L} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ et $\mu(A_n) < +\infty$

3. μ mesure finie $\Rightarrow \mu$ mesure σ -finie

0,25 en effet $\mathcal{L} = \mathcal{L}$; $(\mathcal{L} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \text{ avec } A_n = \mathcal{L})$ et $\mu(A_n) = \mu(\mathcal{L})$ avec $\mu(\mathcal{L}) < +\infty$

• La réciproque est fautive.

sur $\mathbb{Q} = \mathbb{N}$; μ_d est une mesure (mes. de dénombrement)

$\rightarrow \mu_d(\mathbb{N}) = +\infty$ donc μ_d n'est pas finie

0,25

$\rightarrow \mathbb{N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n\}$ avec $\{n\} \in \mathcal{C}$ où $\mathcal{C} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

$\mu_d(\{n\}) = 1$; $1 < +\infty$ donc μ_d est σ -finie.

0,5 $\hookrightarrow$ $\chi_{A_1} = f^{-1}([0;1])$; f mesurable, $[0;1] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ donc

$f^{-1}([0;1]) \in \mathcal{C}$ i.e. $A_1 \in \mathcal{C}$.

0,5 $A_2 = f^{-1}(]1;+\infty[)$, f mesurable; $]1;+\infty[\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ donc $A_2 \in \mathcal{C}$.

b/ f est mesurable et positive.

$\forall x \in A_1$; $f(x) \leq 1$ donc $f(x) \chi_{A_1}(x) \leq 1$

$\forall x \in \mathbb{Q} \setminus A_1$, $f(x) \chi_{A_1}(x) = 0$

0,75

Donc $\forall x \in \mathbb{Q}$; $f(x) \chi_{A_1}(x) \leq 1$

par croissance de l'intégrale, $\int_{\mathbb{Q}} f \chi_{A_1} d\mu \leq \underbrace{\int_{\mathbb{Q}} 1 d\mu}_{\mu(\mathbb{Q}) < +\infty}$

donc $\int_{\mathbb{Q}} f \chi_{A_1} d\mu < +\infty$

c) $\forall x \in A_2$, $f(x) > 1$ donc $f(x) \leq f^2(x)$
ainsi $f(x) \chi_{A_2}(x) \leq f^2(x)$

$\forall x \in \mathbb{Q} \setminus A_2$, $f(x) \chi_{A_2}(x) = 0$

Donc $\forall x \in \mathbb{Q}$ $f(x) \chi_{A_2}(x) \leq f^2(x)$

$\Rightarrow \int_{A_2} f d\mu \leq \int_{\mathbb{Q}} f^2 d\mu < +\infty$ par hypothèse

d) $\mathbb{Q} = A_1 \cup A_2$

0,25

$\int_{\mathbb{Q}} f d\mu = \underbrace{\int_{A_1} f d\mu}_{< +\infty} + \underbrace{\int_{A_2} f d\mu}_{< +\infty}$ donc $\int_{\mathbb{Q}} f d\mu < +\infty$

Corrigé ex 4.

On pose $f_n(x) = (1 - \frac{x}{n})^n \cos(x) \mathbb{1}_{[0;n]}(x)$.

* Mesurabilité :

- $[0;n] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ donc $\mathbb{1}_{[0;n]}$ est mesurable.
- sur $[0;n]$; $x \mapsto (1 - \frac{x}{n})^n \cos(x)$ est continue donc mesurable.

Ainsi f_n est mesurable $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

* $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \frac{x}{n})^n \cos(x) \mathbb{1}_{[0;n]}(x) = e^{-x} \cos(x) \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x)$.

* $\forall x \in \mathbb{R}_+, 1 - x \leq e^{-x}$ donc $\forall x \in [0;n]$

$$1 - \frac{x}{n} \leq e^{-\frac{x}{n}} \Rightarrow (1 - \frac{x}{n})^n \leq e^{-x}$$

$$\Rightarrow (1 - \frac{x}{n})^n \mathbb{1}_{[0;n]}(x) \leq e^{-x} \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x)$$

$$|f_n(x)| \leq e^{-x} |\cos(x)| \mathbb{1}_{[0;n]}(x) \leq e^{-x} \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x)$$

$$g: x \mapsto e^{-x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \text{ est mes. et } \int_{\mathbb{R}} g(x) dx = [-e^{-x}]_0^{+\infty} = 1, 1 < +\infty$$

donc f_n est dominée par 1 fct g intégrable.

* D'après le th. de la convergence dominée :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-x} \cos(x) \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x) dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{(i-1)x} dx \right) \quad (\text{on peut faire 1 double IPP}) \\
&= \operatorname{Im} \left(\left[\frac{1}{i-1} e^{(i-1)x} \right]_0^{+\infty} \right) \\
&= \operatorname{Im} \left(\frac{1}{i-1} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{ix} e^{-x} - \frac{1}{i-1} \right) \\
&= \operatorname{Im} \left(0 - \frac{1}{i-1} \right) \quad \text{car } |e^{ix}| = 1 \\
&= \operatorname{Im} \left(\frac{1}{1-i} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{1+i}{2} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i \right) = \boxed{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Corrigé Ex 5

1. On pose $R: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto x+y.$

$$\begin{aligned}
\text{donc } D &= \{ (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1], R(x, y) \in]-\infty, 1] \} \\
&= [0, 1] \times [0, 1] \cap R^{-1}(]-\infty, 1]).
\end{aligned}$$

0,75 • $[0, 1] \times [0, 1] \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$

• R est continue donc mesurable, $]-\infty, 1] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ donc $R^{-1}(]-\infty, 1]) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$
 • D est donc un borélien de $\mathbb{R}^2$ comme intersection de 2 boréliens.

2. a/ D un borélien donc $\mathbb{1}_D$ est borélienne.

0,75

$(x, y) \mapsto e^{-(x+y)}$ continue sur $\mathbb{R}^2$ donc borélienne

C^t: f est mesurable comme χ de 2 fcts boréliennes.

b/ • λ est σ -finie

• f est borélienne

• f est positive

2,5

$$\begin{aligned}
\text{Donc } \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \lambda \otimes \lambda(dx, dy) &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x+y)} \mathbb{1}_D(x, y) dx dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-(x+y)} \mathbb{1}_D(x, y) dx \right) dy.
\end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-y} e^{-(x+y)} dx \right) dy.$$

$$0 \leq x \leq 1$$

$$0 \leq y \leq 1$$

$$= \int_0^1 e^{-y} \left(\int_0^{1-y} e^{-x} dx \right) dy$$

$$\begin{cases} x+y \leq 1 \\ x \leq 1-y \end{cases}$$

$$= \int_0^1 e^{-y} \left[-e^{-x} \right]_0^{1-y} dy$$

$$= \int_0^1 e^{-y} \left(-e^{-(1-y)} + 1 \right) dy$$

$$= \int_0^1 -e^{-1} + e^{-y} dy$$

$$= \left[-e^{-1} y - e^{-y} \right]_0^1 = \left(-e^{-1} - e^{-1} \right) + 1$$

$$= 1 - 2e^{-1}$$