Data exploration
Statistiques descriptives bivariées

- Observer simultanément des individus d'une population sur deux caractères
- Mesurer un lien éventuel entre deux caractères en utilisant un résumé chiffré qui traduit l'importance de ce lien
- Qualifier ce lien :
  - en cherchant une relation numérique approchée entre deux caractères quantitatifs
  - en cherchant des correspondances entre les modalités de deux caractères qualitatifs

2 types de variables ⇒ 3 types de croisements :
- **qualitatif ×qualitatif**
- qualitatif ×quantitatif
- quantitatif ×quantitatif

Croisement Qualitatif - Qualitatif

Distribution conjointe

- Les seuls calculs possibles sur des variables qualitatives sont des

  effectifs et/ou des fréquences

- Chercher un lien entre deux variables qualitatives X et Y reviendra à étudier l'ensembles des effectifs des sous-populations définies par les couples de modalités (x_i,y_j) prises respectivement par X et Y.

Tableau de contingence

X \ Y	y_1		y_j		y_l
x_1	$n_{1,1}$				$n_{1,1}$
	$n_{i,j}$ est le nombre d'individus ω tels que $X(\omega) = x_i$ et $Y(\omega)= y_j$				
x_i	$n_{i,1}$		$n_{i,j}$		$n_{i,l}$
x_k	$n_{k,1}$		$n_{k,j}$		$n_{k,l}$

Exemple : Etude du lien entre la couleur des yeux et la couleur des cheveux sur un échantillon de 100 personnes

Yeux \ Cheveux	bruns	chatains	roux	blonds
bleus	11	10	1	8
verts	5	8	1	4
marrons	16	22	2	12

Croisement Qualitatif - Qualitatif

Distribution marginale

	y_1		y_j		y_l	
x_1	$n_{1,1}$				$n_{1,l}$	$\mathbf{n_{1,.}}$
x_i	$n_{i,1}$		$n_{i,j}$		$n_{i,l}$	$\mathbf{n_{i,.}}$
x_k	$n_{k,1}$		$n_{k,j}$		$n_{k,l}$	$\mathbf{n_{k,.}}$
	$\mathbf{n_{.,1}}$		$\mathbf{n_{.,j}}$		$\mathbf{n_{.,l}}$	$\mathbf{n}$

Effectifs marginaux

pour X: $n_{i,.} = \sum_{j=1}^{l} n_{i,j}$ pour Y: $n_{.,j} = \sum_{i=1}^{k} n_{i,j}$

Effectif total

$$n = \sum_{j=1}^{l} n_{.,j} = \sum_{i=1}^{k} n_{.i,.} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} n_{i,j}$$

Exemple : Etude du lien entre la couleur des yeux et la couleur des cheveux

Yeux \ Cheveux	bruns	chatains	roux	blonds	
bleus	11	10	1	8	**30**
verts	5	8	1	4	**18**
marrons	16	22	2	12	**52**
	32	**40**	**4**	**24**	**100**

Comparaison des effectifs non pertinente

Croisement Qualitatif - Qualitatif

Distribution marginale

Des effectifs ne sont pas directement comparables tandis que des fréquences sont toujours comparables

	y_1		y_j		y_l	
x_1	$f_{1,1}$				$f_{1,l}$	$\mathbf{f_{1,.}}$
	$f_{i,j}$ est la *proportion* d'individus ω tels que X(ω) = x_i et Y(ω)= y_j					
x_i	$f_{i,1}$		$f_{i,j}$		$f_{i,l}$	$\mathbf{f_{i,.}}$
x_k	$f_{k,1}$		$f_{k,j}$		$f_{k,l}$	$\mathbf{f_{k,.}}$
	$\mathbf{f_{.,1}}$		$\mathbf{f_{.,j}}$		$\mathbf{f_{.,l}}$	**1**

Fréquences marginales

pour X : $f_{i,.} = \sum_{j=1}^{l} f_{i,j}$ pour Y: $f_{.,j} = \sum_{i=1}^{k} f_{i,j}$

$$1 = \sum_{j=1}^{l} f_{.,j} = \sum_{i=1}^{k} f_{i,.} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} f_{i,j}$$

Exemple : Etude du lien entre la couleur des yeux et la couleur des cheveux

Cheveux / Yeux	bruns	chatains	roux	blonds	
bleus	0,11	0,1	0,01	0,08	**0,3**
verts	0,05	0,08	0,01	0,04	**0,18**
marrons	0,16	0,22	0,02	0,12	**0,52**
	0,32	**0,4**	**0,04**	**0,24**	**1**

Croisement Qualitatif - Qualitatif

Profils ligne et colonne

Pour détecter un lien entre les variables X et Y, on compare leurs profils ligne et colonne avec les profils moyens

Profils lignes	y_1		y_j		y_l	
x_1	$f_{1/1}$				$f_{l/1}$	$f_{1,.}$
x_i	$f_{1/i}$		$f_{j/i}$		$f_{l/i}$	$f_{i,.}$
x_k	$f_{1/k}$		$f_{j/k}$		$f_{l/k}$	$f_{k,.}$
	$f_{.,1}$		$f_{.,j}$		$f_{.,l}$	

Profil ligne *:* répartition en fréquence de la variable Y dans une sous-population définie par une modalité de la variable X

$$f_{j/i} = \frac{n_{i,j}}{n_{i,.}}$$

comparable avec $f_{.j}$

Nombres des observations qui ont la modalité i sashant qu'ils ont la modalité j

Profil colonne *:* répartition en fréquence de la variable X dans une sous-population définie par une modalité de Y

$$f_{i/j} = \frac{n_{i,j}}{n_{.,j}}$$

comparable avec $f_{i.}$

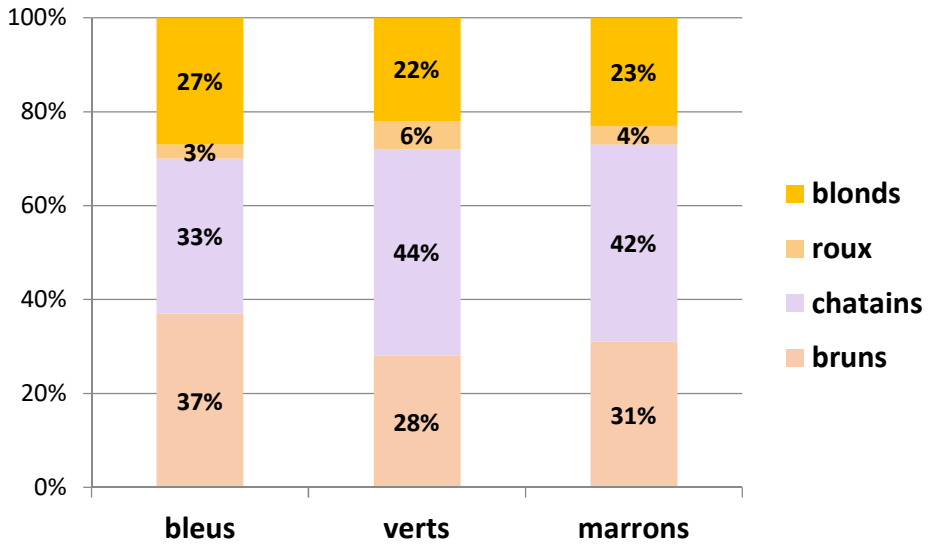
La ligne des fréquences marginales de Y est appelée ***profil moyen***.

Croisement Qualitatif - Qualitatif

Profils ligne et colonne

Profils lignes

	bruns	chatains	roux	blonds	
bleus	0,37	0,33	0,03	0,27	1,00
verts	0,28	0,44	0,06	0,22	1,00
marrons	0,31	0,42	0,04	0,23	1,00
Freq. marginales	0,32	0,4	0,04	0,24	



- *28% des personnes ayant les yeux verts ont les cheveux bruns*
- *32% des personnes ont les cheveux bruns*

28% ont les cheveux bruns sachant qu'ils ont les yeux verts.

➢ Pour les profils lignes, on note que la répartition des couleurs de cheveux est la même quelle que soit la couleur des yeux et est la même que celle de la population totale..

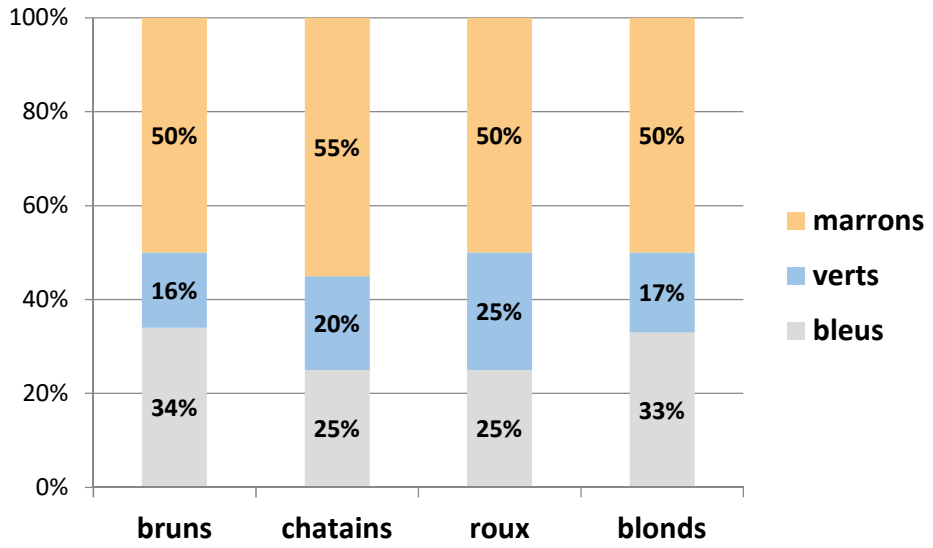
Il ne semble pas y avoir de lien entre les modalités de ces deux caractères

Croisement Qualitatif - Qualitatif

Profils ligne et colonne

Profils colonnes

	bruns	chatains	roux	blonds	
bleus	0,34	0,25	0,25	0,33	0,3
verts	0,16	0,20	0,25	0,17	0,18
marrons	0,50	0,55	0,50	0,50	0,52
	1,00	1,00	1,00	1,00	Freq. marginales



- *16% des bruns ont les yeux verts*
- *18% des personnes ont les yeux verts*

➢ Pour les profils colonnes, on note que la répartition des couleurs des yeux est la même quelle que soit la couleur des cheveux et est la même que celle de la population totale.

Il ne semble pas y avoir de lien entre les modalités de ces deux caractères

Croisement Qualitatif - Qualitatif

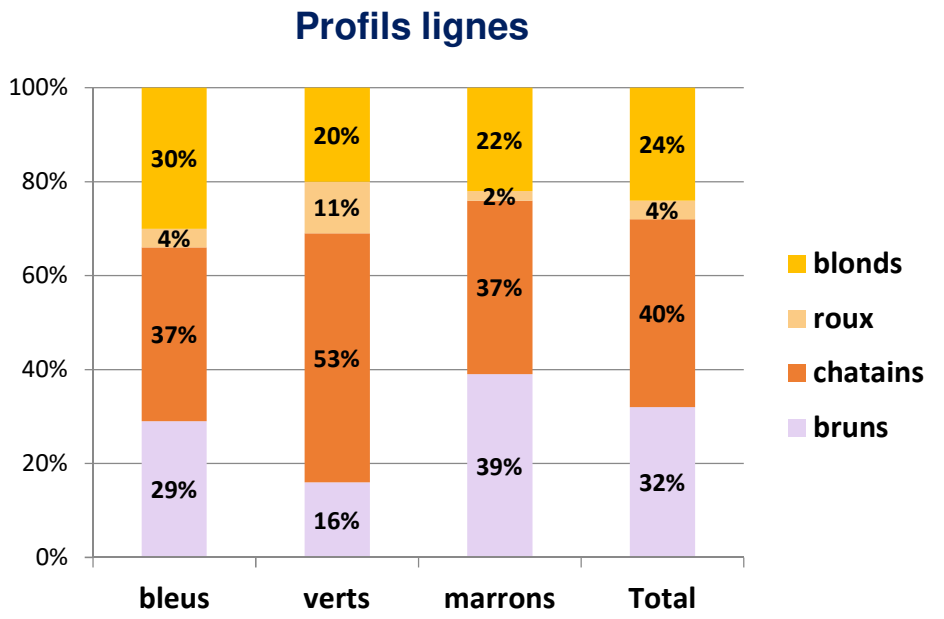
Profils ligne et colonne

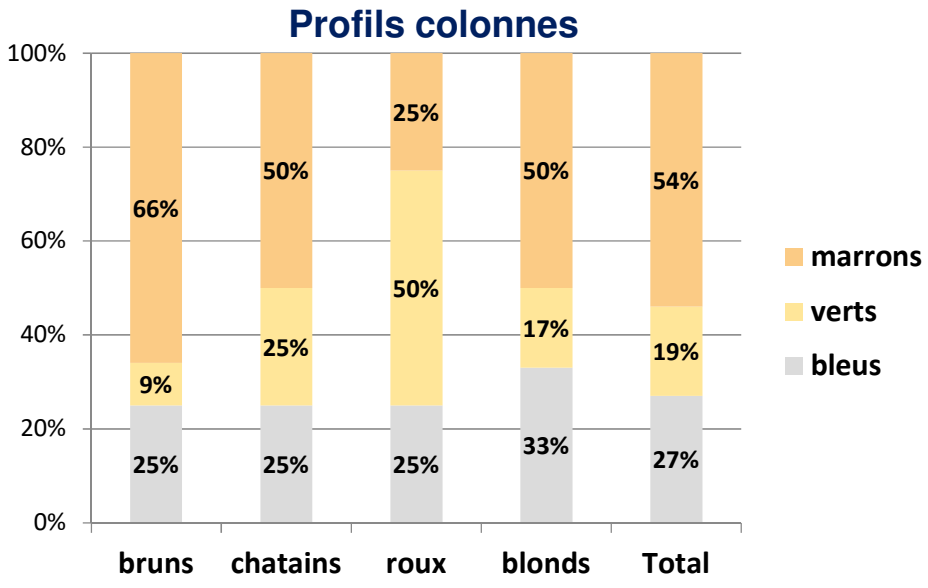
- **Exemple précédent modifié**

	bruns	chatains	roux	blonds	
bleus	8	10	1	8	**27**
verts	3	10	2	4	**19**
marrons	21	20	1	12	**54**
	32	**40**	**4**	**24**	**100**

Dans cet exemple, la répartition de la couleur des cheveux suivant la couleur des yeux n'est pas la même que celle de la population totale.

Il semble qu'il y ait un lien entre les modalités de ces deux variables





Croisement Qualitatif - Qualitatif

Indépendance des variables

X et Y ne sont pas liés

⇔ les profils lignes sont égaux ⇔ les profils colonnes sont égaux

$$\Leftrightarrow \quad f_{i,j} = f_{i,.} \times f_{.,j} \qquad \forall i \in \{1,\dots,k\}, \forall j \in \{1,\dots,l\}$$

Comparaison des tableaux

Tableau de contingence théorique si X et Y sont indépendants

	y_1		y_j		y_l	
x_1	$f_{1,.} \times f_{.,1}$		$f_{1,.} \times f_{.,j}$		$f_{1,.} \times f_{.,l}$	$f_{1,.}$
x_i	$f_{i,.} \times f_{.,1}$		$f_{i,.} \times f_{.,j}$		$f_{i,.} \times f_{.,l}$	$f_{i,.}$
x_k	$f_{k,.} \times f_{.,1}$		$f_{k,.} \times f_{.,j}$		$f_{k,.} \times f_{.,l}$	$f_{k,.}$
	$f_{.,1}$		$f_{.,j}$		$f_{.,l}$	1

Tableau de contingence observé

	y_1		y_j		y_l	
x_1	$f_{1,1}$		$f_{1,j}$		$f_{1,l}$	$f_{1,.}$
x_i	$f_{i,1}$		$f_{i,j}$		$f_{i,l}$	$f_{i,.}$
x_k	$f_{k,1}$		$f_{k,j}$		$f_{k,l}$	$f_{k,.}$
	$f_{.,1}$		$f_{.,j}$		$f_{.,l}$	1

Rappel, Si deux événements A et B sont indépendants alors $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Croisement Qualitatif - Qualitatif

Indépendance des variables

On divise par la taille de l'échantillon

	bruns	chatains	roux	blonds	
bleus	11	10	1	8	**30**
verts	5	8	1	4	**18**
marrons	16	22	2	12	**52**
	32	**40**	**4**	**24**	**100**

Tableau des effectifs observés

	bruns	chatains	roux	blonds	
bleus	0,11	0,1	0,01	0,08	**0,3**
verts	0,05	0,08	0,01	0,04	**0,18**
marrons	0,16	0,22	0,02	0,12	**0,52**
	0,32	**0,4**	**0,04**	**0,24**	**1**

Tableau des fréquences observées

Comment comparer les deux tableaux?

On multiplie par la taille de l'échantillon

$f_{i,.} \times f_{.,j}$

	bruns	chatains	roux	blonds	
bleus	9,6	12	1,2	7,2	**30**
verts	5,76	7,2	0,72	4,32	**18**
marrons	16,64	20,8	2,08	12,48	**52**
	32	**40**	**4**	**24**	**100**

Tableau des effectifs théoriques

	bruns	chatains	roux	blonds	
bleus	0,3×0,32	0,12	0,01	0,07	**0,3**
verts	0,06	0,07	0,01	0,04	**0,18**
marrons	0,17	0,21	0,02	0,12	**0,52**
	0,32	**0,4**	**0,04**	**0,24**	**1**

Tableau des fréquences théoriques

Croisement Qualitatif - Qualitatif

Indépendance et chi-deux

Comment mesurer le lien de dépendance entre les X et Y ? Comment mesurer la « distance » entre les deux tableaux? Mr Pearson a créée la ***distance du χ^2*** :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \frac{(n_{i,j} - t_{i,j})^2}{t_{i,j}}$$

où $t_{i,j} = n \times f_{i,.} \times f_{.,j}$ est l'effectif théorique de la case (i,j).

1. La distance du χ^2 est d'autant plus grande que X et Y sont liées entre eux.
2. Malheureusement la distance du χ^2 dépend aussi :
   - du nombre de modalités de X et Y
   - du nombre d'individus.
3. Pour savoir si la distance χ^2 est suffisamment grande pour décider que les variables sont liées, on la compare à un seuil donné dans le tableau ci-dessous (cf. ing2)

Seuil	3,84	5,99	7,82	9,49	11,07	12,59	14,07	15,51	16,92
d.d.l.	1	2	3	4	5	6	7	8	9

où les degrés de liberté : d.d.l. = (s-1)(k-1) avec s et k les nombres de modalités des deux variables.

- distance du χ^2 > Seuil $\Rightarrow$ dépendance
- distance du χ^2 < Seuil $\Rightarrow$ indépendance

4. La comparaison est efficace si les **effectifs théoriques sont ≥5**, sinon on regroupe des modalités