TD: Séries numériques

Exercice 1. *Déterminer la nature des séries suivantes :*

1. $\sum\limits_{n\geq 1} \cos \frac{1}{n^2}$, 2. $\sum\limits_{n\geq 1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, 3. $\sum\limits_{n\geq 1} e^{-2\ln(n)}$, 4. $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{n^2+1}{n^2}$, 5. $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{2}{\sqrt{n}}$, 6. $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^3}$

7. $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(\ln(n))^n}$, 8. $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \ln\left(1+e^{-n}\right)$, 9. $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{(-1)^n n}{n+1}$, 10. $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}}$

Exercice 2. *En utilisant le critère de d'Alembert, déterminer si les séries suivantes sont convergentes ou divergentes :*

$$1. \sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{n^2}, \qquad 2. \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2^n}{n!}, \qquad 3. \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

Exercice 3. *On s'intéresse à la série numérique* $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n(n+1)}$.

1. *Montrer par récurrence que, pour tout* $N \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{N}{N+1}$$

2. *En déduire que la série étudiée est convergente, et déterminer la valeur de sa somme* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$.

Exercice 4. *Soit* (u_n) *une suite de réels positifs et* $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$. *Montrer que* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *et* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ *sont de même nature.*

Exercice 5. *En utilisant un critère de comparaison, déterminer si les séries suivantes sont convergentes ou divergentes :*

$$1. \sum_{n\geq 2} \frac{1}{\sqrt{n-1}}, \qquad 2. \sum_{n\geq 2} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}, \qquad 3. \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{1+n+n^2}, \qquad 4. \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{4^n+1}$$

$$5. \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^3-1}, \qquad 6. \sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 6. *Considérons les séries*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$$

Montrer que les termes généraux de ces séries sont équivalents mais que les séries n'ont pas la même nature.

de terme général.

Exercice 7. *Montrer la convergence et calculer les sommes des séries suivantes :*

1. $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!k!}$
2. $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!2^{n-k}}$

Exercice 8. *Déterminer des équivalents en* $+\infty$ *de :*

1. $u_n = \dfrac{e^{1/n} - \cos\left(\dfrac{1}{n}\right)}{1 - \sqrt{1 - \dfrac{1}{n^2}}}$
2. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$
3. $u_n = \dfrac{\ln\left(\cos\left(\dfrac{a}{n}\right)\right)}{\ln\left(\cos\left(\dfrac{b}{n}\right)\right)}$, $a, b \in \mathbb{R}^*$
4. $u_n = e^{1/n} - e^{1/(n+1)}$
5. $u_n = \dfrac{\ln\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)}{\sin\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)}$
6. $u_n = e\sqrt{n^2 - n + 1} - n\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

Exercice 9. *Étudier la convergence de la série numérique de terme général :*

1. $u_n = (-1)^n \dfrac{n^3}{n!}$
2. $u_n = \dfrac{a^n}{n!}$, $a \in \mathbb{C}$
3. $u_n = na^{n-1}$, $a \in \mathbb{C}$

Exercice 1. *Déterminer la nature des séries suivantes :*

1. $\sum_{n\geq1} \cos\frac{1}{n^2}$, 2. $\sum_{n\geq1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, 3. $\sum_{n\geq1} e^{-2\ln(n)}$, 4. $\sum_{n\geq1}\frac{n^2+1}{n^2}$, 5. $\sum_{n\geq1}\frac{2}{\sqrt{n}}$, 6. $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^3}$

7. $\sum_{n\geq2}\frac{1}{(\ln(n))^n}$, 8. $\sum_{n\in\mathbb{N}}\ln\left(1+e^{-n}\right)$, 9. $\sum_{n\geq0}\frac{(-1)^n n}{n+1}$, 10. $\sum_{n\geq1}\frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}}$

1) $\sum_{n\geq 1} \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)$, soit $U_n = \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$\lim_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)$, or $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) \to 0$

donc $\lim_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{n^2}\right) \to 1$

comme, $\sum \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)$

On a $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

donc $\lim_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{n^2}\right) = \cos(0) = 1$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 \neq 0$, alors $\sum_{n\geq1} \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)$ DV

2) $\sum_{n\geq1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $U_n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\frac{1}{n}} = e^{\frac{n}{n}} = e^1 \neq 0$ série DV

$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

3) $\sum_{n\geq1} e^{-2\ln(n)}$, $U_n = e^{-2\ln(n)} = e^{\ln(n^{-2})} = n^{-2} = \frac{1}{n^2}$

série de Riemann CV

4) $\sum_{n\geq1} \frac{n^2+1}{n^2}$, On pose $U_n = \frac{n^2+1}{n^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^2}{n^2} = 1$

$\sum 1$

DVG

5) $\sum_{n\geq1} \frac{2}{\sqrt{n}} = 2\sum_{n\geq1}\frac{1}{\sqrt{n}}$

Posons $U_n = \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{1/2}}$

On retrouve une série de Riemann avec $\alpha = 1/2 < 1$

série Riemann CV,

6) $\sum \frac{2n^4+6n+1}{7n^6+7n^2+1} \sim \frac{2n^4}{7n^6} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ série Riemann CV $2>1$

7) $\sum_{n\geq2} \frac{1}{\ln(n)^n}$ On pose $U_n = \frac{1}{(\ln(n))^n}$

$\forall n \geq 2$, $\ln(n) > 0$

Donc $\frac{1}{\ln(n)^n} > 0$

car $n \geq 2$

Utilisons le critère de Cauchy

$\lim \sqrt[n]{\frac{1}{\ln(n)^n}} = \left(\frac{1}{\ln(n)^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1^{\frac{1}{n}}}{\ln(n)} = \frac{1}{\ln(n)}$

$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)}$

d'après Cauchy

8) $\sum \ln\left(1+e^{-1}\right)$

On pose $U_n = \ln\left(1+e^{-n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{e^{n}}$

car $\lim_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$

$\sum e^{-n} = \sum \left(\frac{1}{e}\right)^n$ série géo $q = \frac{1}{e} < 1$

série CV.

9) $\sum_{n\geq0} \frac{(-1)^n n}{n+1} = (-1)^n \times \frac{n}{n+1}$

Critère Leibniz et $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$

DV

10) $(-1)^n \times \frac{1}{n+\sqrt{n}}$

Critère Leibniz $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}} = 0$

* Calculons $U_{n+1} - U_n$

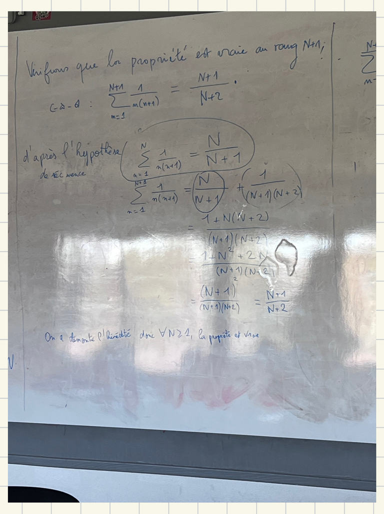
$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n+1+\sqrt{n+1}} - \frac{1}{n+\sqrt{n}}$

$= \frac{(n+\sqrt{n}) + (n+1+\sqrt{n+1})}{(n+\sqrt{n}) \times (n+1+\sqrt{n+1})}$

Donc $U_{n+1} - U_n = \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1} - 1}{(n+\sqrt{n})(n+1+\sqrt{n+1})}$

$\forall n$, $(n+\sqrt{n})(n+1+\sqrt{n+1}) > 0$

Donc le signe de $U_{n+1} - U_n$ dépend numérateur



Exercice 2. *En utilisant le critère de d'Alembert, déterminer si les séries suivantes sont convergentes ou divergentes :*

1. $\sum_{n\geq1}\frac{2^n}{n^2}$, 2. $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{2^n}{n!}$, 3. $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$

1) On pose $U_n = \frac{2^n}{n^2}$

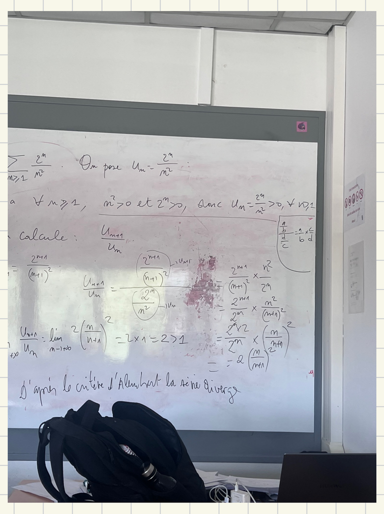
On a $\forall n \geq 1$, $n^2 > 0$ et $2^n > 0$, donc $U_n = \frac{2^n}{n^2} > 0$, $\forall n \geq 1$

On calcule $\frac{U_{n+1}}{U_n}$

$U_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{2^n}{n^2}} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2} \times \frac{n^2}{2^n} = 2\left(\frac{n}{n+1}\right)$

$\lim 2\left(\frac{n}{n+1}\right) = 2\times1 = 2$

DV d'après d'Alembert



Exo n°2.

② $\frac{2^n}{n!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$L = 0 < 1$$

③

Exo 3

$$\sum \frac{1}{n(n+1)} = \frac{N}{N+1}$$

initialisation pour $N = 1$

$$\sum \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1} = \frac{N}{N+1} \quad \text{avec } N=1$$

Vraie pour $N = 1$

Hérédité pour $N+1$

$$\sum \frac{1}{n(n+1)} = \frac{N}{n+1} + \frac{1}{(N+1)(N+2)}$$

② on fait tendre $n \to +\infty$

$= 1$
cv

Exercice 3. *On s'intéresse à la série numérique* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$.

1. *Montrer par récurrence que, pour tout* $N \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{N}{N+1}$$

On s'interesse à la série numérique $\sum \frac{1}{n(n+1)}$

(1) Montrer par récurrence que, $\forall N \geq 1$ $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{N}{N+1}$

* Initialisation

Pour $N=1$, on a $\sum_{n=1}^{1} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2}$ et

$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ Donc la propriété est vraie au rang $N=1$

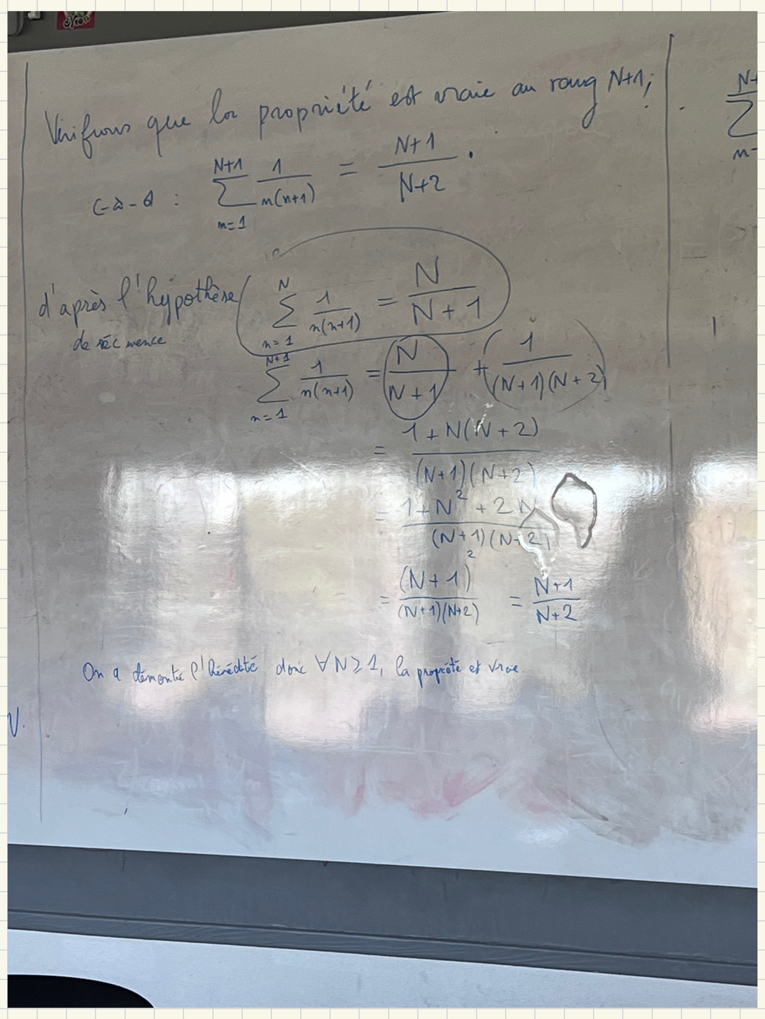
* Hérédité

supposons que l'hypothèse de récurrence est vraie jusqu'au rang N

Vérifions que la propriété est vraie au rang $N+1$

c-à-d : $\sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{N+1}{N+2}$

d'après l'hypothèse de récurrence $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{N}{N+1}$



2) Déduire que la série étudiée est CV et déterminer la valeur de sa somme.

La suite des sommes partielles $S_n = \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{N}{N+1}$

CV car $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim \left(\frac{N}{N+1}\right) = 1$

On déduit $\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ est convergente

Exercice 4. *Soit* (u_n) *une suite de réels positifs et* $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$. *Montrer que* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *et* $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ *sont de même nature.*

* $\sum_{n\in\mathbb{N}} U_n$ converge $\Leftrightarrow$ $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge ?

$\Rightarrow$ supposons que $\sum U_n$ converge et montrons que $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$, comme $\sum U_n$, converge. , on a $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$

Mais $v_n = \frac{U_n}{1+U_n} \Leftrightarrow \frac{U_n}{v_n} = 1+U_n$

Donc $\lim \left(\frac{U_n}{v_n}\right) = \lim (1+U_n) = 1$

Par conséquent $U_n \sim v_n$, cela implique

$\sum U_n \sim \sum v_n$

Comme (U_n) et (v_n) sont des réels positifs, alors par le critère d'équivalence, $\sum v$ converge car $\sum U_n$ l'est par hypothèse

$\Leftarrow$ Supposons $\sum v_n$ converge, on a $\lim v_n = 0$
Montrons que $\sum U_n$ converge.

On a $v_n = \frac{U_n}{1+U_n} \Leftrightarrow v_n(1+U_n) = U_n \Leftrightarrow v_n + v_n U_n = U_n$
$\Leftrightarrow v_n = U_n - v_n U_n$
$\Leftrightarrow v_n = U_n(1-v_n)$
$\Leftrightarrow U_n = \frac{v_n}{1-v_n}$

On regarde $\frac{U_n}{v_n} = \frac{1}{1-v_n}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{U_n} = \lim (1-v_n) = 1$

donc $v_n \sim U_n$

càd, $\sum v_n = \sum U_n$

et comme $\sum v_n$ converge, alors $\sum U_n$ conv.

Donc sont de m̂ nature.

Exercice 5. *En utilisant un critère de comparaison, déterminer si les séries suivantes sont convergentes ou divergentes :*

$$1. \sum_{n\geq 2} \frac{1}{\sqrt{n-1}}, \quad 2. \sum_{n\geq 2} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}, \quad 3. \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{1+n+n^2}, \quad 4. \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{4^n+1}$$

$$5. \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^3-1}, \quad 6. \sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

1) $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\sqrt{n-1}}$, $U_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}}$

critère équivalence

$$\frac{1}{\sqrt{n-1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow \text{car} \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n-1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{1/2}} \rightarrow \text{Riemann DV.}$$

$\boxed{\text{Autre méthode}}$ $\forall n \geq 2$, $n-1 \leq n \Rightarrow \sqrt{n-1} < \sqrt{n}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n-1}}$$

$$\underbrace{\sum \frac{1}{\sqrt{n}}}_{\text{DV}} \leq \underbrace{\sum \frac{1}{\sqrt{n-1}}}_{\text{DV}}$$

↳ DV donc ↳ DV

2) $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$, Posons $U_n = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \geq 0 \quad \forall n \geq 2$

$n(n-1) = n^2-n \sim n^2$ car $\lim \frac{n^2-n}{n^2} = 1$

$$\sqrt{n(n-1)} \sim \sqrt{n^2} = n$$

$$\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \sim \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \sim \sum \frac{1}{n}$$

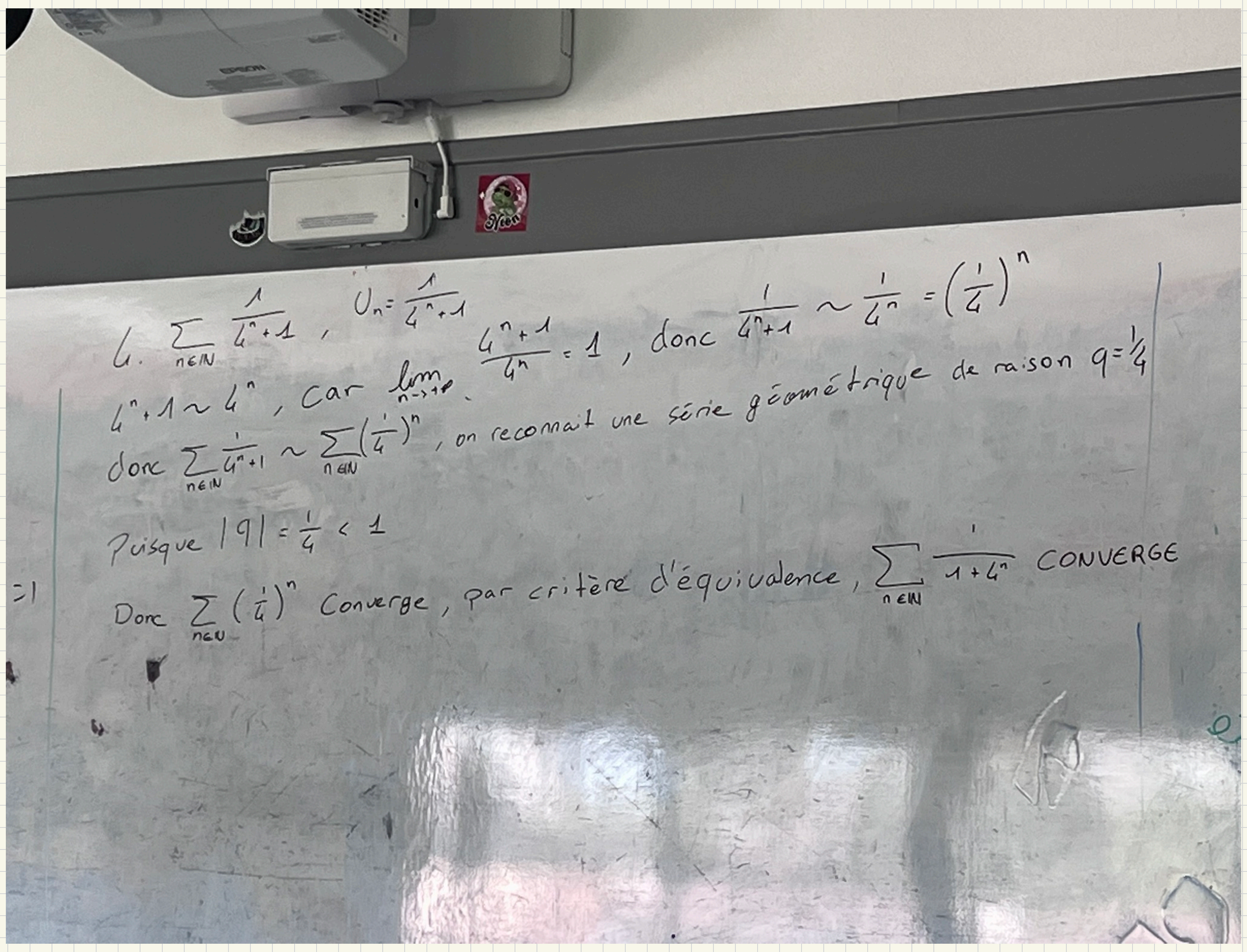
comme $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n}$ alors $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$ diverge par critère d'équivalence

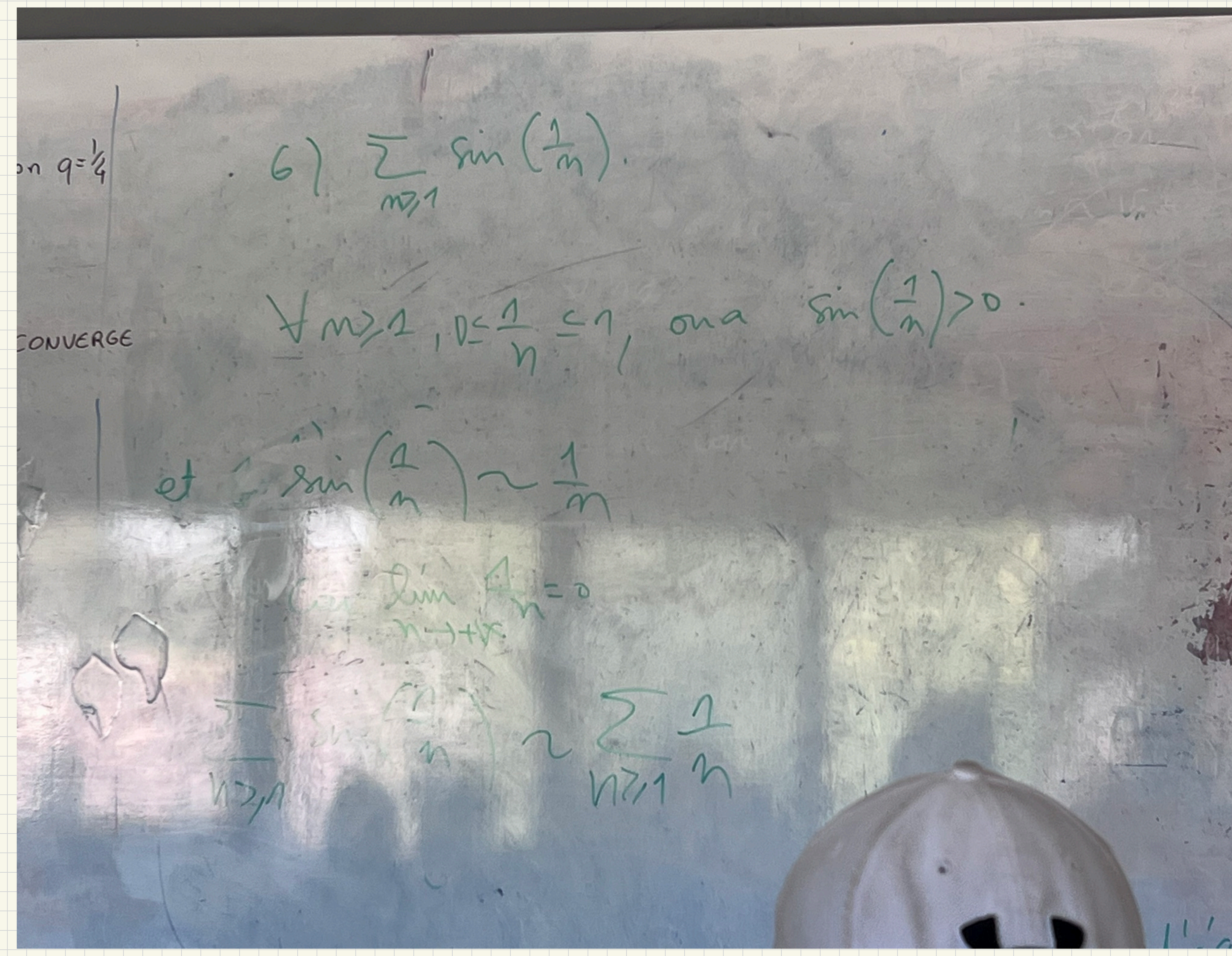
3) $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{1+n+n^2}$, On a $1+n+n^2 \sim n^2$ car $\lim \left(\frac{1+n+n^2}{n^2}\right) = 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+n+n^2} \sim \frac{1}{n^2}$$

Donc $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{1+n+n^2} \sim \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$

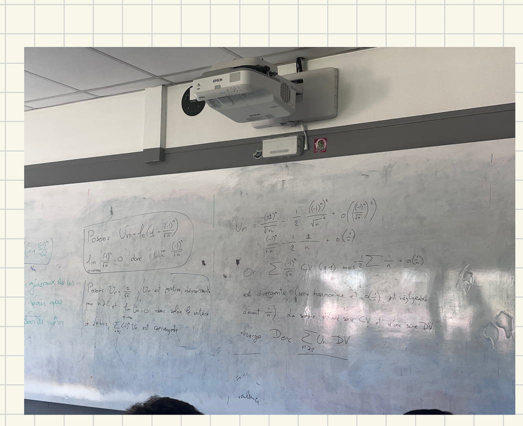
Et comme $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ CV car série Riemann





ex6 : ~ puis DC puis Leibniz

↳ série Harmonique



Exercice 7. *Montrer la convergence et calculer les sommes des séries suivantes :*

1. $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!k!}$
2. $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!2^{n-k}}$

1) $U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!}$

Posons $v_n = \frac{1}{n!}$, On a $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$ où

$w_n = \sum_{k=0}^{n} v_k v_{n-k}$

Donc $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n$

Ainsi la série de terme général U_n est donné par.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} U_n = \left(\sum^{+\infty} v_n\right)\left(\sum^{+\infty} v_n\right)$$

Pour que $\sum U_n$ CV, il faut que au moins 1 de ses séries CVA.

Mq $\sum_{n=0}^{+\infty} v$ CVA.

Mq $\sum |v_n| \to$ CV

$\lim_{n \to +\infty} \left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right| = 0 < 1$

d'après critère d'Alembert.

Calculons $\sum U_n$

$$\sum U_n = \left(\sum v_n\right)\left(\sum v_n\right)$$

$$= \left(\sum \frac{1}{n!}\right)\left(\sum \frac{1}{n!}\right)$$

$$= e \times e = e^2$$

2) $U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!\, 2^{n-k}}$

$\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ converge et calculer la somme

Posons $a_n = \frac{1}{n!}$ et $b = \frac{(-1)^n}{2^n}$

$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ où

$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

Donc $\left(\sum^{+\infty} a_n\right)\left(\sum^{+\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{(-1)^{n-k}}{2^{n-k}}\right)$

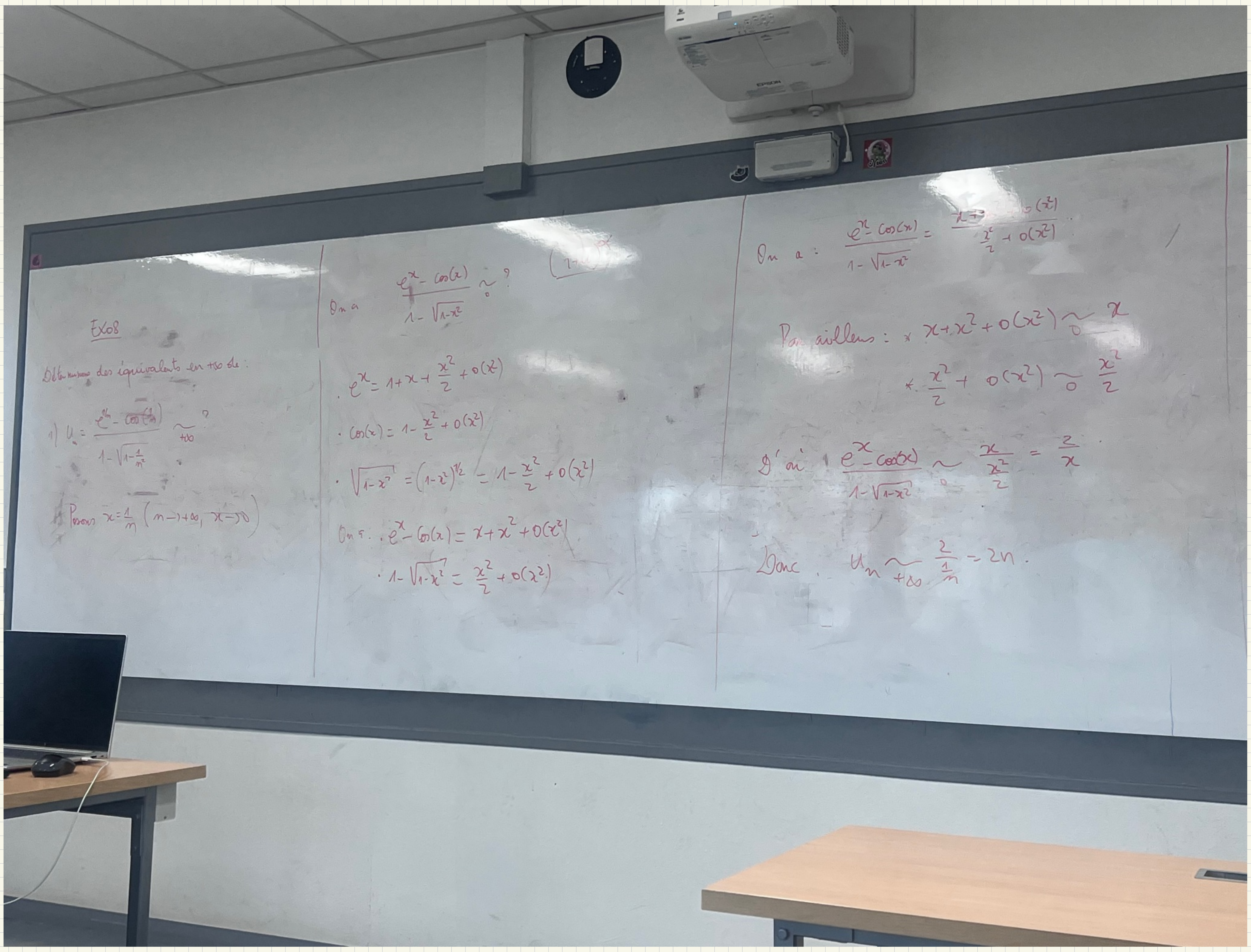
$= \sum^{+\infty} U_n$

Il faut montrer

Exo 8

Determinons des equivalents

1) $U_n = \dfrac{e^{1/n} - \cos}{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}}$



TD2 - Intégrales

Exercice 1. *($\star$) On considère la fonction :*

$$f : [0,4] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} -1 & si\ x = 0, \\ 1 & si\ 0 < x < 1, \\ 3 & si\ x = 1, \\ -2 & si\ 1 < x \leq 2, \\ 4 & si\ 2 < x \leq 4. \end{cases}$$

1. *Représenter graphiquement la fonction f.*
2. *Calculer :*

$$\int_0^4 f(t)\, dt.$$

Exercice 2. *($\star$) Calculer l'intégrale :*

$$I = \int_0^{50} \lfloor x \rfloor \, dx.$$

Indication : déterminer une subdivision du segment $[0,50]$ adaptée à la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$.

Exercice 3. *Calculer l'intégrale :*

$$J = \int_0^{50} \lfloor \sqrt{x} \rfloor \, dx.$$

Indication : déterminer une subdivision du segment $[0,50]$ adaptée à la fonction $x \mapsto \lfloor \sqrt{x} \rfloor$.

Exercice 4. *($\star$) Trouver une fonction $f \in \mathscr{C}^0_{pm}(\mathbb{R})$ telle que la fonction :*

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_0^x f(t)\, dt$$

ne soit pas dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $f \in \mathscr{C}^0_{pm}([a,b])$. On considère la fonction :*

$$f_+ : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \max\{f(x), 0\}.$$

1. *Montrer que $f_+ \in \mathscr{C}^0_{pm}([a,b])$.*
2. (a) *Montrer que :*

$$\int_a^b f_+(t)\, dt \geq 0.$$

   (b) *Montrer que :*

$$\int_a^b f(t)\, dt \leq \int_a^b f_+(t)\, dt.$$

Exercice 6. *($\star$) Pour chaque somme, calculer sa limite quand n tend vers $+\infty$ si elle existe.*

1. $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{1+e^{-\frac{k}{n}}}$ *en admettant que :* $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$.
2. $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt[n]{2^k}$ *en admettant que :* $\displaystyle\int_0^1 e^{x\ln(2)} dx = \frac{1}{\ln(2)}$.

Indication : utiliser une somme de Riemann en ecrivant la somme sous la forme :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \qquad \text{ou sous la forme :} \qquad \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

Exercice 7. *($\star$) Calculer les intégrales suivantes :*

$$1.\ \int_0^2 \frac{x^2-1}{x^2+1}dx;\quad 2.\ \int_1^8 \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}}dx;\quad 3.\ \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}dx;\quad 4.\ \int_1^5 \frac{1-x^2}{x}dx.$$

Exercice 8. *Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes à l'aide d'une intégration par parties et préciser son domaine de définition :*

$$f_1 : x \longmapsto x\ln(x) \qquad f_2 : x \longmapsto x^2e^x \qquad f_3 : x \longmapsto \sin(x)e^{3x} \qquad f_4 : x \longmapsto x(\ln(x))^2.$$

Exercice 9. *($\star$) Calculer les intégrales suivantes en effectuant une intégration par parties :*

$$\int_0^2 (x+1)e^x\ dx;\quad \int_1^3 x^2\ln(x)\ dx;\quad \int_1^2 \sqrt{x}\ln(x)\ dx;\quad \int_0^{2\pi} \sin(x)\mathrm{sh}(x)\ d.$$

Exercice 10. *($\star$) Calculer les integrales suivantes a l'aide d'un changement de variable :*

$$1.\ \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\ dx,\quad 2.\ \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\ dx,\quad 3.\ \int_0^\pi \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\ dx$$

$$4.\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan(x))\ dx,\quad 5.\ \int_{1/2}^2 \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan(x)\ dx,\quad 6.\ \int_0^1 x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\ dx.$$

Indications : pour la troisieme integrale, considérer $\varphi : x \longmapsto \pi - x$, puis reconnaître la dérivée d'une fonction arctan *; pour la quatrieme intégrale, considérer $\varphi : x \longmapsto \frac{\pi}{4} - x$; pour la cinquieme intégrale, considérer $\varphi : x \longmapsto \frac{1}{x}$ et utiliser la relation $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$; pour la sixieme integrale, considérer $\varphi : x \longmapsto \cos(2x)$.*

Exercice 11. *($\star$) Soit $f \in \mathscr{C}^0([-1,1])$.*

1. *Montrer que si f est impaire, alors :*

$$\int_{-1}^1 f(t)dt = 0.$$

2. *Montrer que si f est paire, alors :*

$$\int_{-1}^1 f(t)dt = 2\int_0^1 f(t)dt.$$

Exercice 12. *Calculer les intégrales suivantes :*

$$\int_{-1}^1 \frac{x^2+2x}{x^2+1}dx;\quad \int_0^1 \frac{3x+1}{-x^2+2x+3}dx.$$

Exercice 13. *($\star$) Déterminer, en utilisant le critère de Riemann, la nature des intégrales suivantes.*

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\ dx;\quad I_2 = \int_0^1 \ln(x)^3\ dx;\quad I_3 = \int_0^{+\infty} \exp(-x)\ln(x)\ dx;\quad I_4 = \int_0^1 \exp(\ln^2(x))\ dx$$

Exercice 14. *($\star$) Déterminer, en utilisant les équivalents de fonctions, la nature des intégrales suivantes.*

$$J_1 = \int_0^1 \frac{1-\sqrt{1-x}}{x}\ dx;\quad J_2 = \int_0^1 \frac{\tan(x)}{\arcsin(x)-x}\ dx.$$

Exercice 15. *Soient $\alpha < \beta$ deux réels. Étudier la nature de l'intégrale suivante :*

$$I = \int_\alpha^\beta \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}.$$

Déterminer ensuite la valeur de cette intégrale. On pourra utiliser le changement de variable $u = \frac{x-\alpha}{\beta-x}$.

Exercice 16. *($\star$) Après avoir montré que les intégrales suivantes convergent, déterminer leur valeur par intégration par parties.*

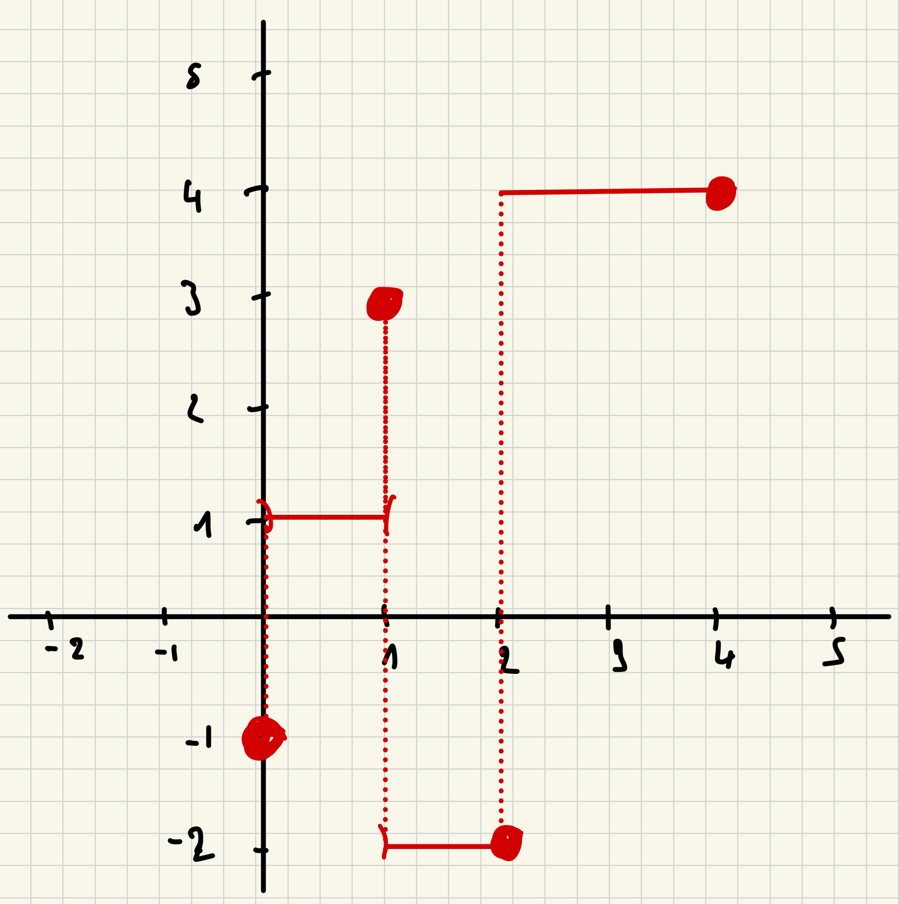
$$I_1 = \int_0^{+\infty} t^2e^{-t}dt;\quad I_2 = \int_1^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}dt.$$

Exercice 1. *(⋆) On considère la fonction :*

$$f : [0,4] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} -1 & si\ x = 0, \\ 1 & si\ 0 < x < 1, \\ 3 & si\ x = 1, \\ -2 & si\ 1 < x \leq 2, \\ 4 & si\ 2 < x \leq 4. \end{cases}$$

1. *Représenter graphiquement la fonction f.*
2. *Calculer :*

$$\int_0^4 f(t)\, dt.$$



1) $\sigma = (\overset{x_0}{0}, \overset{x_1}{1}, \overset{x_2}{2}, \overset{x_3}{4}) \in S[0,4]$

$$\int f(x)\, dx = \sum_{k=0}^{2} c_k \,(x_{k+1} - x_k)$$

$$= C_0 (x_1 - x_0) + C_1 (x_2 - x_1) + C_2 (x_3 - x_2)$$

$f(x) = C_k$ sur $]x_k, x_{k+1}[$

$C_0 = 1$

$C_1 = -2$

$C_2 = 4$

$$\int_0^4 f(x)\, dx = 1 \times (1-0) - 2(2-1) + 4(4-2)$$

$$1 - 2 + 8 = 7$$

Exercice 4. ($\star$) *Trouver une fonction $f \in \mathscr{C}^0_{pm}(\mathbb{R})$ telle que la fonction :*

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$$

ne soit pas dérivable sur $\mathbb{R}$.

Trouver une fonction $f \in \mathscr{C}^0_{pm}(\mathbb{R})$ tq la fonction

$F(x) = \int^x f(t)\,dt$ ne soit pas dérivable sur $\mathbb{R}$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \to \begin{cases} -1 \text{ si } x < 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Cette fonction f est continue par morceaux car c'est une fonction escalier

Calculons $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

* si $x > 0$, $f(t) = 1$ sur $[0, x]$

* si $x < 0$, $f(t) = -1$ sur $[x, 0[$

Donc $F(x) = \int_1^x 1\,dt$ pour $x > 0$

$= x$

et

$F(x) = \int_0^x 1\,dt$ pour $x > 0$ $= x$

et

$F(x) = \int_0^x -1\,dt = -\int_x^0 (-1)\,dt$ pour $x < 0$

$= \int_x^0 1\,dt = -x$

On trouve $F(x) = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} = |x|$

Donc F n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$ mais l'est sur $\mathbb{R}^*$

Exercice 6. *(⋆) Pour chaque somme, calculer sa limite quand n tend vers $+\infty$ si elle existe.*

1. $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{1+e^{-\frac{k}{n}}}$ *en admettant que :* $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$.
2. $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt[n]{2^k}$ *en admettant que :* $\displaystyle\int_0^1 e^{x\ln(2)}dx = \frac{1}{\ln(2)}$.

Indication : utiliser une somme de Riemann en ecrivant la somme sous la forme :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \quad \text{ou sous la forme :} \quad \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right).$$

Pour chaque somme. Calculer sa limite quand $n \to +\infty$ si elle existe

1) $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+e^{-\frac{k}{n}}}$ en admettan $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$

On va utiliser $\displaystyle\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)\,dx$

Ici on prend $b=1$ et $a=0$

$$f = [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$x \to \frac{1}{1+e^{-x}}$$

On calcule

$$f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = f\left(0+k\frac{1-0}{n}\right) = f\left(\frac{k}{n}\right)$$

la fonction $f \in \mathcal{C}_{pm}([0,1])$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1-e^{-\frac{k}{n}}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(x)\,dx$$

On calcule

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}}\,dx = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

2) $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt[n]{2^{k}}$ en admettant que $\int_0^1 e^{x\ln(x)}\,dx = \frac{1}{\ln(x)}$

On a $\sqrt[n]{2^{k}} = 2^{\frac{k}{n}}$

On considère $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto 2^{x} = e^{x\ln x}$

$g \in \mathcal{C}^0_{pm}([0,1])$

On a $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt[n]{2^{k}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right) \longrightarrow \int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 e^{x\ln 2}\,dx = \frac{1}{\ln(2)}$

Exercice 7. *(⋆) Calculer les intégrales suivantes :*

1. $\int_0^2 \frac{x^2-1}{x^2+1}dx$; 2. $\int_1^8 \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}}dx$; 3. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}dx$; 4. $\int_1^5 \frac{1-x^2}{x}dx$.

1) $\int_0^2 \frac{x^2-1}{x^2+1}$ On remarque $x^2-1 = (x^2+1)-2$

Donc $\int_0^2 \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx = \int_0^2 \frac{(x^2+1)-2}{x^2+1}\,dx$

$= \int_0^2 \left(1 - \frac{2}{x^2+1}\right)dx$

$$\int_0^2 \frac{x^2-1}{x^2+1} = \int_0^2 1\,dx - 2\int_0^2 \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \left[x\right]_0^2 - 2\left[\arctan(x)\right]^2$$

$$= 2 - 2\left(\arctan(2) - \arctan(0)\right)$$

2) $\int_1^8 \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}}\,dx$

On a : $(\sqrt{x}-1)^2 = x-2\sqrt{x}+1$. Donc

$$\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}} = \frac{x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = \frac{x}{\sqrt{x}} - 2 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Ainsi $\int_1^8 \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^8 \left(\frac{x}{\sqrt{x}} - 2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$

$$= \int_1^8 \frac{x}{\sqrt{x}}\,dx - 2\int_1^8 dx + \int_1^8 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$\Rightarrow \int_1^8 \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^8 x^{1/2}\,dx - 2\int_1^8 dx + \int_1^8 x^{-1/2}\,dx = ?$$

3) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}\,dx$

On a $\sqrt{2-x^2} = \sqrt{2\left(1-\frac{x^2}{2}\right)} = \sqrt{2\left(1-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2\right)}$

$$= \sqrt{2} \times \sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

Donc $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}}\,dx$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}}$$

$\int_0^2 \frac{x^2-1}{x^2+1}$

Posons $t = \frac{x}{\sqrt{2}}$. On a $dt = \frac{dx}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \boxed{dx = \sqrt{2}\,dt}$

Si $x=0$, $t=0$

Si $x=1$, $t=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Donc $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\sqrt{2}\,dt}{\sqrt{1-t^2}}$

$$= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$= \left[\arcsin(t)\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \left[\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^1$$

$$= \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \arcsin(0)$$

$$= \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \arcsin(0)$$

$$= \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

On a $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$

Exercice 9. *(⋆) Calculer les intégrales suivantes en effectuant une intégration par parties :*

$$\int_0^2 (x+1)e^x \, dx; \quad \int_1^3 x^2 \ln(x) \, dx; \quad \int_1^2 \sqrt{x}\ln(x) \, dx; \quad \int_0^{2\pi} \sin(x)\mathrm{sh}(x) \, d.$$

1) $\int_0^2 (x+1) e^x \, dx$

On considère $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, $x \to x+1$ et $g : [0,2] \to \mathbb{R}$, $x \to e^x$

$$\int_0^2 f(x)\, g'(x)\, dx = \left[f(x)\, g(x)\right]_0^2 - \int_0^2 f'(x) g(x)\, dx$$

3) $\int_1^2 \sqrt{x}\, \ln(x) dx =$

$f' = x^{1/2}$ $\quad f = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$

$g' = \frac{1}{x}$ $\quad g = \ln(x)$

4) $\int \cos(x)\, sh(x)\, dx$

$f' : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$
$x \to \sin$

$g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$
$x \to sh$

Donc $g'(x) = ch$

et $f(x) = -\cos(x)$

$$\int^{2\pi} \sin(x)\, sh(x) = \int_0^{2\pi} f'(x)\, g(x)\, dx = \left[f(x)\, g(x)\right] - \int_0^{2\pi} f(x) g'(x)\, dx$$

$$= \left[-\cos(x)\, sh(x)\right] + \underbrace{\int^{2\pi} \cos(x)\, ch(x)\, dx}_{I}$$

on refait IPP

2) $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx$

Posons $x = \sin(t)$

lorsque $\begin{cases} x = -1, & t = \frac{-\pi}{2} \\ x = 1, & t = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

On a $\frac{dx}{dt} = \cos(t)$

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)}\, \cos(t)\, dt = \int^{\pi} \sqrt{\cos^2(t)}\, \cos\, dt$$

$\cos^2 t + \sin^2 t$

Exo 10 :

Calculons les intégrales suivante

3) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x \sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx$, avec chgmt de variable $\varphi : x \to \pi - x$

Par chgmt de variable :

φ est $\mathcal{C}^1([a,b])$ et f continue sur $\varphi([a,b])$

alors $\displaystyle\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) = \int_a^b f(\varphi(t)) \times \varphi'(t)\,dt$

* On a, $f(x) = \dfrac{x \sin(x)}{1+\cos^2(x)}$, $\varphi(x) = \pi - x$

$$\begin{cases} \varphi(\pi) = 0 \\ \varphi(0) = \pi \end{cases}$$

$\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x \sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx =$

* f est continue $\varphi([0,\pi])$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1([0,\pi])$

$$\int_{\varphi(\pi)}^{\varphi(0)} f(x)\,dx = \int_{\pi}^{0} f(\varphi(x)) \times \varphi'(x)\,dx$$

$$= - \int_0^{\pi} f(\varphi(x)) \times \varphi'(x)\,dx$$

$$= - \int_0^{\pi} \frac{\varphi(x) \sin(\varphi(x))}{1+\cos^2(\varphi(x))} \times (-1) \quad \text{car } \varphi' = -1$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x) \sin(\pi - x)}{1+\cos^2(\pi - x)}\,dx = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx$$

$$I_3 = \int_0^{\pi} \frac{\pi \sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx - \underbrace{\int_0^{\pi} \frac{x \sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx}_{I_3}$$

Donc $I_3 = \int_0^{\pi} \frac{\pi \sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx - I_3$

$$2I_3 = \int_0^{\pi} \frac{\pi \sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx$$

Donc il reste à calculer $\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx$

Posons $u = \cos(x)$, alors $du = -\sin(x)\,dx$

Quand $x = 0 \to u = 1$

$x = \pi \to u = -1$

Ainsi, $\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx = \int_1^{-1} \frac{\sin(x)}{1+u^2}\,\frac{du}{-\sin(x)}$

$$= -\int_1^{-1} \frac{du}{1+u^2} = \int_{-1}^{1} \frac{du}{1+u^2} = \left[\arctan(u)\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} = \frac{2I_3}{\pi}$$

$$I_3 = \frac{\pi}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$$

$$I_5 = \int_{1/2}^{2} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \arctan(x)\,dx$$

Indication, utiliser $\varphi\, x \mapsto \frac{1}{x}$ et

$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

■

Soit $f : [1/2, 2] \to \mathbb{R}$

$x \to \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \arctan(x)$

$\varphi : [2, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$

$x \to \frac{1}{x}$

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(\varphi(x)) \times \varphi'(x)\,dx$$

On cherche a et b tq $\varphi(a) = \frac{1}{2}$

et $\varphi(b) = 2$

Ainsi sur $a = 2$ et $b = \frac{1}{2}$

f est continue sur $\varphi([\frac{1}{2}, 2]) = [\frac{1}{2}, 2]$

$\varphi \in \mathcal{C}^1([\frac{1}{2}, 2])$. D'après la formule du chgmt de variable

$$\int_{\varphi(2)}^{\varphi(\frac{1}{2})} f(x)\,dx = \int_2^{1/2} f(\varphi(x)) \times \varphi'(x)\,dx$$

Ainsi $I_5 = \int_2^{1/2} \left(1 + \frac{1}{\varphi(x)^2}\right) \arctan(\varphi(x)) \times \varphi'(x)\,dx$

$$= -\int_{1/2}^{2} (1 + x^2) \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \times -\frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= \int_{1/2}^{2} (1 + x^2) \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{x^2}\,dx$$

Comme $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$, alors

$$I_5 = \int_{1/2}^{2} (1 + x^2)\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\right) \times \frac{1}{x^2}$$

$$= \int_{1/2}^{2} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\frac{\pi}{2}\,dx - \underbrace{\int_{1/2}^{2} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \arctan(x)\,dx}_{= I_5}$$

Ainsi $I_s = \frac{\pi}{2}\int_{1/2}^{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx - I_s$

$\Leftrightarrow \quad 2I_s = \frac{\pi}{2}\int_{1/2}^{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx$

$\Leftrightarrow \quad I_s = \frac{\pi}{4}\int_{1/2}^{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx = \frac{\pi}{4}\left[x-\frac{1}{x}\right]_{1/2}^{2} = \frac{3\pi}{4}$

Exercice 11. *($\star$) Soit $f \in \mathscr{C}^0([-1,1])$.*

1. *Montrer que si f est impaire, alors :*
$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = 0.$$
2. *Montrer que si f est paire, alors :*
$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = 2\int_{0}^{1} f(t)dt.$$

1) On a $\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = \int_{-1}^{1} -f(-t)\,dt$

car $f(-t) = -f(t)$

On change t par $-t$ dans $\int_{-1}^{1} -f(-t)\,dt$

Ainsi $-\int_{-1}^{1} f(-t)\,dt = -\int_{-1}^{1} f(t)\,(-dt)$

$= \int_{1}^{-1} f(t)\,dt$

$\Rightarrow \int_{-1}^{1} f(t)\,dt = \int_{1}^{-1} f(t)\,dt = -\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$

$\Rightarrow 2\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = 0$

$\Rightarrow \int_{-1}^{1} f(t)\,dt = 0$

2) Si f est paire $\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{1} f(t)\,dt$

On a : $\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = \int_{-1}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{1} f(t)\,dt$

Il suffit de mq $\int_{-1}^{0} f(t)\,dt = \int_{0}^{1} f(t)\,dt$

en utilisant la parité

$\int_{-1}^{0} f(t)\,dt = \int_{-1}^{0} f(-t)\,dt$, changer t en $-t$

$\int_{-1}^{0} f(-t)\,dt = \int_{1}^{0} f(t)\,(-dt)$

$$= -\int_0^1 f(t)\,(-dt)$$

$$= \int_0^1 f(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{0} f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt$$

Exo 13

Déterminer en utilisant le critère de Riemann, la nature des intégrales

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,dx$$

Soit $f(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}$

* la fonction $x \mapsto f(x)$ est continue sur $]0,1]$
* f n'est pas positive sur $]0,1]$

Comme f n'est pas positive sur $]0,1]$ on va étudier

$$\int_0^1 |f(x)|\,dx$$

On a $|f(x)| = \left|\frac{\ln(x)}{1+x^2}\right| = \frac{|\ln(x)|}{1+x^n} = \frac{-\ln(x)}{1+x^2} > 0$ sur $]0,1]$

Il faut trouver α tq

$$\lim_{x\to 0} |f(x)| = \lim_{x\to 0} \frac{x^{\alpha} - \ln|x|}{1+x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} x^n \ln(x) = 0 \ ? \quad n > 0$$
$$= -\infty \quad n < 0$$

Donc on prend $\alpha = \frac{1}{2} < 1$

On a $\lim\limits_{x\to 0} x^{1/2}\,|f(x)| = \lim\limits_{x\to 0} -x^{1/2}\ln(x) \times \lim \frac{1}{1+x^2}$

$= 0 \in \mathbb{R}$

Ainsi $\int_0^1 |f(x)|\,dx$ CV

d'après le critère de soumission

Par conséquent $\int_0^1 f(x)\,dx$ CV

$I_2 = \int_0^1 (\ln(x))^3\,dx$

Soit $f :]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longrightarrow (\ln(x))^3$

f est continue sur $]0,1]$ mais n'est pas positive sur $]0,1]$

On considère $\int_0^1 |f(x)|\,dx$

$$\int_0^1 |f(x)|\,dx = \int_0^1 |\ln(x)^3|\,dx = \int_0^1 -(\ln(x))^3\,dx$$

On a $\lim -x^{1/2} \ln^3(x) = 0 \in \mathbb{R}$

En effet posons $t = -\ln(x)$, quand $x \to 0$, $t \to +\infty$

Ainsi $-x^{1/2} \ln^3(x) = t^3 \times e^{-t/2}$ car $e^t = e^{-\ln(x)} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$

Donc $\lim -x^{1/2} \ln^3(x) = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{t^3}{e^{t/2}} = 0$

$I_3 = \int_0^{+\infty} e^{-x} \ln(x)\,dx$

On a $I_3 = \int_0^1 e^{-x} \ln(x)\,dx + \int_1^{+\infty} e^{-x} \ln(x)\,dx$ $\boxed{CV}$

Exercice 14. *(⋆) Déterminer, en utilisant les équivalents de fonctions, la nature des intégrales suivantes.*

$$J_1 = \int_0^1 \frac{1-\sqrt{1-x}}{x}\,dx; \quad J_2 = \int_0^1 \frac{\tan(x)}{\arcsin(x)-x}\,dx.$$

En 0 la fonction $x \to \dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x}$

n'est pas définie

Donc il faut chercher un équivalent $\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x}$ en 0

On a $\sqrt{1-x} = 1 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + o(x^2)$ au voisinage de 0

Ainsi $1\sqrt{1-x} = \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{8} + o$

TD3 - Algèbre Bilinéaire

Formes bilinéaires

Exercice 1 (Forme bilinéaire antisymétrique)
Soit φ la forme sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ définie pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ par :

$$\varphi(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

1) Montrer que φ est anti-symétrique. φ est-elle symétrique ?
2) Montrer que φ est bilinéaire.

Exercice 2 (Forme de Lorentz)
Soit $c > 0$ un paramètre réel et $\varphi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ et $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$ par :

$$\varphi(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - c^2 x_4 y_4$$

1) Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^4$.
2) φ est-elle positive ? définie ?
3) On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Donner la matrice de φ dans $\mathcal{B}$.

Exercice 3
Déterminer la forme bilinéaire φ sur $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 (Matrice d'une forme bilinéaire)
Considérons la forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$: $\forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\varphi(x, y) = 5x_1 y_1 + 7x_1 y_2 + 7x_2 y_1 + 10x_2 y_2$$

(1) Déterminer la forme quadratique associé à φ, i.e. :

$$q(x) = \varphi(x, x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

1) Déterminer la matrice de φ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$. φ est-elle symétrique ?
2) Soit $\mathcal{B}' = (v_1, v_2)$ avec $v_1 = (3, -2)$ et $v_2 = (-1, 1)$.
   Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}'$. Donner l'expression de φ par rapport à $\mathcal{B}'$.

Espaces euclidiens

Exercice 5
Pour tout $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ et $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, on pose :

$$\varphi(x, y) = (x_1 - 2x_2)(y_1 - 2y_2) + x_2 y_2 + (x_2 + x_3)(y_2 + y_3)$$

Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6
Montrer que l'application φ suivante est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[x]$:

$$\varphi(P,Q) = \int_0^1 P(x)Q(x)\,dx \quad \forall P,Q \in \mathbb{R}[x]$$

Exercice 7
Soit $E = \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$. Pour tout $f,g \in E$, on pose

$$\varphi(f,g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)(1-t^2)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que φ définit un produit scalaire sur E.

Exercice 8
Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Pour tout $f,g \in E$, on pose

$$\varphi(f,g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

Exercice 9 (Norme euclidienne)
Sur $\mathbb{R}^2$, on définit les fonctions suivantes

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| \quad ; \quad \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \qquad \forall x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$$

1) a) Vérifier que $\|.\|_1$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
   b) Montrer que $\|.\|_1$ n'est pas une norme euclidienne.

2) a) Vérifier que $\|.\|_2$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
   Indication : Pour $x,y \in \mathbb{R}^2$ fixés, étudier le discriminant de la fonction polynomiale de degré 2 définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par
   $$f(t) = \|x+ty\|_2^2,\ \forall t \in \mathbb{R}$$
   b) Montrer que $\|.\|_2$ est une norme euclidienne et déterminer le produit scalaire associé.

Exercice 10 (Orthogonalité)
$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire usuel :

$$\langle A,B\rangle = tr(A^T B) \ ; \qquad \forall A,B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Montrer que $A \perp B$.
2) Déterminer le s.e.v. $\{A\}^\perp$ et donner sa dimension.

Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien

Exercice 11
Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace vectoriel euclidien de dimension 3 muni d'une base orthonormée $B = (e_1,e_2,e_3)$. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ déterminé par :

$$\mathrm{Mat}_B(p) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Montrer que p est un projecteur orthogonal sur un plan dont on précisera une équation.

Exercice 12
Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace vectoriel euclidien de dimension 3 muni d'une base orthonormée $B = (e_1, e_2, e_3)$. Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ déterminé par :

$$\mathrm{Mat}_B(s) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Montrer que s est une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace F que l'on déterminera. Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à $F^\perp$ et un système d'équation(s) de $F^\perp$.

Exercice 13
Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace euclidien. On appelle isométrie de E toute application $g : E \to E$ qui vérifie :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \|g(x) - g(y)\| = \|x - y\|$$

1. Soit l'application $f : E \to E$ donnée par

$$f(x) = g(x) - g(0)$$

   Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.

2. En déduire que $f \in O(E)$.

3. En déduire que toute isométrie de E s'écrit comme la composée d'une translation et d'un automorphisme orthogonal.

Exercice 1 (Forme bilinéaire antisymétrique)
Soit φ la forme sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ définie pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ par :

$$\varphi(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

1) Montrer que φ est anti-symétrique. φ est-elle symétrique ?

2) Montrer que φ est bilinéaire.

1) • $\varphi(x,y) = x_1 y_2 - x_2 y_1$

$$= -y_1 x_2 + y_2 x_1 = -\varphi(y,x)$$

Donc φ est Antisymétrique

• φ est symétrique ?
Non car elle est antisymétrique
car $\varphi(x,y) = -\varphi(y,x)$
Elle est symétrique $\varphi(x,y) = 0_{\mathbb{R}^2}$
$\Updownarrow$
$\varphi(x,y) = -\varphi(y,x) \Leftrightarrow \varphi(x,y) + \varphi(y,x) = 0$
$\Leftrightarrow 2\varphi(x,y) = 0$
$\Leftrightarrow \varphi(x,y) = 0_{\mathbb{R}^2}$

2) Mq φ est bilinéaire.

1 Mq φ est linéaire par le premier argument.

Posons $\forall x, x', y \in \mathbb{R}^2$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$
$\varphi(x + \lambda x', y) = \varphi(x,y) + \lambda \varphi(x',y)$
$= x_1 y_2 + \lambda(x_1' y_2) - x_2 y_1 + \lambda(x_2' y_1)$
$= x_1 y_2 - x_2 y_1 + \lambda(x_1' y_2 - x_2' y_1)$

2 $\forall x, y, y' \in \mathbb{R}^2$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

Exercice 2 (Forme de LORENTZ)
Soit $c > 0$ un paramètre réel et $\varphi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ et $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$ par :

$$\varphi(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - c^2 x_4 y_4$$

1) Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^4$.

2) φ est-elle positive ? définie ?

3) On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Donner la matrice de φ dans $\mathcal{B}$.

1 Mq φ est bilinéaire sym sur $\mathbb{R}^4$
$\left(x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \text{ et } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}\right) \in \mathbb{R}^4$

ÉVIDEMENT elle est sym

BLABLA....

2) $\forall x \in \mathbb{R}^4$, $x \neq 0_{\mathbb{R}^4}$, $\varphi(x,x) > 0$?

Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ avec $x = 0_{\mathbb{R}^4}$

On a : $\varphi(x,x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2 x_4^2 > 0$?

Pour $x = (0,0,0,1) = -c^2 < 0$

Donc φ n'est pas positive définie

$(1,1,1,1)$ $3 \cdot c^2 > 0$

3) On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$

Donner la matrice φ dans $\mathcal{B}$

Soit A la matrice de φ dans $\mathcal{B}$

$$A\left(\varphi(e_i, e_j)\right)_{1 \leq i,j \leq 4} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c^2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \varphi(e_1,e_1) & \varphi(e_1,e_2) & \varphi(e_1,e_3) & \varphi(e_1,e_4) \\ \varphi(e_2,e_2) & \varphi(e_2,e_2) & \varphi(e_2,e_3) & \varphi(e_2,e_4) \\ \varphi(e_3,e_3) & \varphi(e_3,e_2) & \varphi(e_3,e_3) & \varphi(e_3,e_4) \\ \varphi(e_4,e_4) & \varphi(e_4,e_4) & \varphi(e_4,e_3) & \varphi(e_4,e_4) \end{pmatrix}$$

Exercice n°3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Déterminer la forme bilinéaire φ sur $\mathbb{R}^3$ de A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$

Soit $x \in \mathbb{R}^3$, $y \in \mathbb{R}^3$: $\varphi \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \end{array}$

On a $\varphi(x,y) = x^T A y$

avec $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$$\varphi(x,y) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} y_1 + 2y_2 + 3y_3 \\ 2y_1 + 3y_2 + 4y_3 \\ 3y_1 + 4y_2 + 3y_3 \end{pmatrix}$$

$$= x_1(y_1 + 2y_2 + 3y_3) + x_2(2y_1 + 3y_2 + 4y_3) + x_3(3y_1 + 4y_2 + 3y_3)$$

φ est symétrique car $A^T = A$

Exercice n°4

$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longrightarrow 5x_1y_1 + 7x_1y_2 + 7x_2y_1 + 10x_2y_2$

1) Déterminons la forme quadratique associée à φ i.e $q(x) = \varphi(x,y)\ \forall x \in \mathbb{R}^2$

$\forall x \in \mathbb{R}^2,\ q(x) = \varphi(x,x) = 5x_1^2 + 7x_1x_2 + 7x_1x_2 + 10x_2^2$

$= 5x_1^2 + 14x_1x_1 + 10x_2^2$

2) Déterminer la matrice φ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$

Soit A la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$

On a $\mathcal{B} = e_1, e_2$ avec

$e_1(1,0) \quad e_2(0,1)$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$$

$A^T = A$

Exercice 5
Pour tout $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ et $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, on pose :

$$\varphi(x, y) = (x_1 - 2x_2)(y_1 - 2y_2) + x_2 y_2 + (x_2 + x_3)(y_2 + y_3)$$

Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

$$\varphi(x,y) = (x_1 - 2x_2)(y_1 - 2y_2) + x_2 y_2 + (x_2+x_3)(y_2+y_3)$$

Mq φ est bilinéaire, symétrique, $\varphi(x,x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $\varphi(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$

① vérifions la symétrie $\varphi(y,x) = (y_1 - 2y_2)(x_1 - 2x_2) + y_2 x_2 + (y_2+y_3)(x_2+x_3)$

$$= (x_1 - 2x_2)(y_1 - 2y_2) + x_2 y_2 + (x_2+x_3)(y_2+y_3)$$

$$= \varphi(x,y)$$

② bilinéaire : comme c'est symétrique, il suffit de montrer que c'est linéaire sur 1 seul argument.

$$\forall x, x', y \in \mathbb{R}^3, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \varphi(x + \lambda x', y) = \varphi(x,y) + \lambda \varphi(x',y)$$

③ $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $\varphi(x,x) = (x_1 - 2x_2)^2 + x_2^2 + (x_2+x_3)^2 \geq 0$

④ $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $\varphi(x,x) = 0 \Leftrightarrow (x_1 - 2x_2)^2 + x_2^2 + (x_2+x_3)^2$

$\Leftrightarrow \quad x_1 - 2x_2 = 0, \ x_2 = 0, \ x_2 + x_3 = 0$

$\Rightarrow$ donc $x_1 = 0$

$x_2 = 0 \quad \Rightarrow x = 0_{\mathbb{R}^3}$

$x_3 = 0$

Exercice 6
Montrer que l'application φ suivante est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[x]$:

$$\varphi(P,Q) = \int_0^1 P(x)Q(x)\,dx \quad \forall P,Q \in \mathbb{R}[x]$$

① symétrie : $\varphi(P,Q) = \int_0^1 P(x)\,Q(x)\,dx = \int_0^1 Q(x)\,P(x)\,dx = \varphi(Q,P)$

② Linéarité $\forall P, P', Q \in \mathbb{R}[x]^3$

$\varphi(P+\lambda P', Q) = \int (P+\lambda P')\,Q\,dx = \int (PQ) + (\lambda P' Q)\,dx$

$= \int_0^1 P(x)\,Q(x) + \lambda \int P' Q\,dx$

③ $\varphi(P,P) = \int_0^1 P^2\,dx \geq 0$ car $P \in \mathbb{R}[x]$

④ $\varphi(P,P) = 0 \Rightarrow \int P^2\,dx = 0 \Rightarrow P = 0_{\mathbb{R}[x]}, \forall x \in [0,1]$

$\Leftrightarrow P \equiv 0$ car un polynôme qui s'annule sur l'intervalle est le polynome nul.

Donc φ produit scalaire

Exercice 7
Soit $E = C([-1,1], \mathbb{R})$. Pour tout $f, g \in E$, on pose

$$\varphi(f,g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)(1-t^2)\,dt$$

Montrer que φ définit un produit scalaire sur E.

Soit $E = \mathcal{C}([-1;1])$ et $\varphi(f,g) = \int_{-1}^{2} f(t)\,g(t)\,(1-t^2)\,dt$.

Mq φ est un produit scalaire sur E

① symétrie évidente.

② $\forall f \in \mathcal{C}([-1;1])$, $\varphi(f;f) = 0 \Leftrightarrow \int_{-1}^{1} f^2(t)\,(1-t^2)\,dt = 0$

$\Leftrightarrow f^2(t)\,(1-t^2) = 0 \quad \forall t \in [-1,1]$

$\Leftrightarrow \forall t \in]-1,1[$, $1-t^2 > 0$ et $f^2(t) = 0$

$\Leftrightarrow \forall t \in]-1,1[$, $1-t^2 > 0$ et $f(t) = 0$

$\Leftrightarrow f \equiv 0$ par continuité de f (aussi en ± 1)

Ainsi φ est produit scalaire sur $\mathcal{C}([-1,1])$

Exercice 10 (Orthogonalité)

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire usuel :

$$\langle A, B\rangle = tr(A^T B) \;; \qquad \forall A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Montrer que $A \perp B$.

2) Déterminer le s.e.v. $\{A\}^{\perp}$ et donner sa dimension.

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Mq $A \perp B$

Il suffit de montrer $\langle A, B \rangle = 0$

$\forall A, B \in M_2(\mathbb{R})$

On a $A^T B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

On a $tr(A^T B) = tr \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = -1 + 1 = 0$

Donc $\langle A, B \rangle = 0 \Leftrightarrow A \perp B$

2) On a $A^{\perp} = \{X \in M_2(\mathbb{R}) / \langle A, X \rangle = 0\}$

Soit $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Calculons $\langle A, X \rangle = 0$

$\langle A, X \rangle = tr(A^T X) = 0$

$= a + b + c + d = 0$

$A^{\perp}$ est l'ensemble des matrices de $M_2(\mathbb{R})$ dont la somme des coef càd $A^\perp = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a+b+c+d = 0\}$

Determinons la dim de $A^\perp$

On a $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = A^\perp \oplus \mathrm{Vect}(A)$

Donc $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \dim A^\perp + \dim \mathrm{Vect}(A)$

$$4 = \dim A^\perp + \mathrm{rg}(A)$$

$$\Rightarrow \dim A^\perp = 4 - \mathrm{rg}(A)$$

Le rang rg de A c'est le nombre de vecteur linéairement indépendants on le

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien

Exercice 11
Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace vectoriel euclidien de dimension 3 muni d'une base orthonormée $B = (e_1, e_2, e_3)$. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ déterminé par :

$$\mathrm{Mat}_B(p) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Montrer que p est un projecteur orthogonal sur un plan dont on précisera une équation.

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ base canonique de E

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ définie par :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Il suffit de mq :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^2(p) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p)}$$

et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^T(p) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$

Comme $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^2(p) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$ alors p est un projecteur orthogonal

Précison l'équation de p

La projection p dans le plan vérifie

$$p : \begin{array}{ccc} F \oplus F^{\perp} & \longrightarrow & F \\ (u, v) & \longmapsto & u \end{array}$$

Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. On résout

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p)\, x = x \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p)\, x - x = 0$

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$\iff x_1 = x_3 - 2x_2$

$\iff x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$

Exercice 12

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace vectoriel euclidien de dimension 3 muni d'une base orthonormée $B = (e_1, e_2, e_3)$. Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ déterminé par :

$$\mathrm{Mat}_B(s) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Montrer que s est une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace F que l'on déterminera. Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à $F^{\perp}$ et un système d'équation(s) de $F^{\perp}$.

Il suffit de mq:

- $\mathrm{Mat}_B^T(s) = \mathrm{Mat}_B(s)$ (évident
- $\mathrm{Mat}_B^2(s) = I_3$ (involution)

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer F

Pour déterminer F, on résout

$$s_F(x) = x, \ \forall x \in \mathbb{R}^3$$
$$\Updownarrow$$
$$\mathrm{Mat}_B(s)\, x = x$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$F = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \right\} = \mathrm{Vect}(2, -1, -1)$$

Exercice 13

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien. On appelle isométrie de E toute application $g : E \to E$ qui vérifie :

$$\forall (x, y) \in E^2, \ \|g(x) - g(y)\| = \|x - y\|$$

1. Soit l'application $f : E \to E$ donnée par

$$f(x) = g(x) - g(0)$$

   Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.

2. En déduire que $f \in O(E)$.
3. En déduire que toute isométrie de E s'écrit comme la composée d'une translation et d'un automorphisme orthogonal.

$\forall x,$