Compléments de Mathématiques

Sam P.

Table des matières

1 Séries numériques

1.1 Généralités et définitions fondamentales

Définition. Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$. La **série numérique de terme général** u_n est la somme formelle :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots$$

que l'on note :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Si la suite commence à l'indice n_0, on écrit :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n.$$

Exemple.

$$u_1 + u_2 + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n.$$

Définition (Sommes partielles). Pour tout $N \in \mathbb{N}$, la **somme partielle d'ordre** N est :

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_N.$$

La suite (S_N) est appelée **suite des sommes partielles** de la série $\sum u_n$.

Exemple.

— Pour $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, il est difficile de calculer toutes les sommes partielles. Par exemple :

$$S_3 = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}.$$

— Pour $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n$, il s'agit d'une série géométrique de raison $q = 2$, donc :

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} 2^n = \frac{1 - 2^{N+1}}{1 - 2} = 2^{N+1} - 1.$$

Définition (Convergence et divergence). La série $\sum u_n$ est dite **convergente** si la suite de ses sommes partielles (S_N) converge. Dans ce cas, on définit :

$$\lim_{N\to+\infty} S_N = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Sinon, la série est dite **divergente**.

Exemple. Pour $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n$, on a $S_N = 2^{N+1}-1$ et $\lim_{N\to+\infty} S_N = +\infty$, donc la série diverge.

Définition (Reste d'une série convergente). Si $\sum u_n$ converge vers S, on définit pour tout N :

$$R_N = S - S_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n.$$

1.2 Structure algébrique

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques et $\lambda \in \mathbb{R}$.

— **Addition :** $\sum(u_n + v_n)$.

— **Multiplication par un scalaire :** $\lambda \sum u_n = \sum(\lambda u_n)$.

— **Produit de Cauchy :** $\left(\sum u_n\right)\left(\sum v_n\right) = \sum w_n$ où $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.

Remarque. Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent :

1. $\sum(u_n + v_n)$ converge ;
2. $\sum(\lambda u_n)$ converge ;
3. Si au moins une des deux converge absolument, alors $\sum w_n$ converge.

1.3 Condition nécessaire de convergence

Théorème. Si $\sum u_n$ converge, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Corollaire. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$, alors la série diverge (*divergence grossière*). La réciproque est fausse : $u_n \to 0$ n'implique pas la convergence de $\sum u_n$.

1.4 Séries de référence

Série géométrique. Soit $q \in \mathbb{R}$. La série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$:

$$\begin{cases} \text{converge si } |q| < 1, \\ \text{diverge si } |q| \geq 1. \end{cases}$$

Série de Riemann. Soit $\gamma \in \mathbb{R}$. La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\gamma}$:

$$\begin{cases} \text{converge si } \gamma > 1, \\ \text{diverge si } \gamma \leq 1. \end{cases}$$

1.5 Séries à termes positifs

Définition. Une série $\sum u_n$ est **positive** si $u_n \geq 0$ pour tout n.

Propriété. Pour une série positive, la suite (S_N) est croissante. Elle converge si et seulement si elle est majorée.

Critères de convergence

Critère d'Alembert. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs et $l = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Alors :

$$\begin{cases} l < 1 \Rightarrow \text{la série converge}, \\ l > 1 \Rightarrow \text{la série diverge}, \\ l = 1 \Rightarrow \text{pas de conclusion}. \end{cases}$$

Critère de Cauchy. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs et $l = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n}$. Alors :

$$\begin{cases} l < 1 \Rightarrow \text{la série converge}, \\ l > 1 \Rightarrow \text{la série diverge}, \\ l = 1 \Rightarrow \text{pas de conclusion}. \end{cases}$$

Critères de comparaison

Suites équivalentes. Deux suites (u_n) et (v_n) non nulles à partir d'un certain rang sont dites **équivalentes**, noté $u_n \sim v_n$, si :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

Équivalences utiles. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors :

$$\sin(u_n) \sim u_n, \quad \cos(u_n) \sim 1, \quad \ln(1+u_n) \sim u_n, \quad e^{u_n} \sim 1.$$

Tout polynôme en n est équivalent à son monôme de plus haut degré.

Comparaison par inégalité. Si $0 \leq u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang :

$$\sum v_n \text{ converge } \Rightarrow \sum u_n \text{ converge},$$

$$\sum u_n \text{ diverge } \Rightarrow \sum v_n \text{ diverge}.$$

Comparaison par équivalence. Si $u_n \sim v_n$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature (convergentes ou divergentes).

1.6 Séries alternées

Définition. Une série de la forme $\sum(-1)^n u_n$ ou $\sum(-1)^{n+1}u_n$, avec $u_n \geq 0$, est appelée **série alternée**.

Critère de Leibniz. Si (u_n) est décroissante et $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors la série $\sum(-1)^n u_n$ converge.

Exemple. La série harmonique alternée $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge par le critère de Leibniz.

1.7 Séries à termes quelconques

Convergence absolue et semi-convergence

Définition. La série $\sum u_n$ est **absolument convergente** si $\sum |u_n|$ converge. Toute série absolument convergente est convergente.

Exemple. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge (critère de Leibniz) mais $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge, donc elle est **semi-convergente**.

Critères usuels de convergence absolue

Critère d'Alembert (valeurs absolues). Si $\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = l$, alors :

$$\begin{cases} l < 1 \Rightarrow \text{convergence absolue,} \\ l > 1 \Rightarrow \text{divergence grossière,} \\ l = 1 \Rightarrow \text{pas de conclusion.} \end{cases}$$

Critère de Cauchy (valeurs absolues). Si $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = l$, alors :

$$\begin{cases} l < 1 \Rightarrow \text{convergence absolue,} \\ l > 1 \Rightarrow \text{divergence grossière,} \\ l = 1 \Rightarrow \text{pas de conclusion.} \end{cases}$$

Théorèmes spécifiques

Théorème spécial des séries alternées (TSSA). Si $(|u_n|)$ est décroissante et tend vers 0, alors $\sum u_n$ converge.

Série de Riemann alternée. La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\lambda}$ converge si et seulement si $\lambda > 0$.

Série de Bertrand. Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \text{ converge si et seulement si } \begin{cases} \alpha > 1, \text{ pour tout } \beta, \\ \text{ou } \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1. \end{cases}$$

Sommes télescopiques. Si $v_n = u_{n+1} - u_n$, alors :

$$\sum v_n \text{ converge } \Leftrightarrow (u_n) \text{ converge,}$$

et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} (u_n - u_0).$$

2 Intégrales

Dans tout ce chapitre, on fixe deux réels $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

2.1 Fonctions en escalier et intégrale

Définition (Subdivision). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **subdivision** du segment $[a, b]$ toute famille ordonnée

$$\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$$

telle que

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

On note $\mathcal{S}(a, b)$ l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$.

Exemple. La famille $(0, \frac{1}{2}, 1)$ est une subdivision du segment $[0, 1]$.

Définition (Subdivision régulière). On appelle **subdivision régulière de rang** n du segment $[a, b]$ la subdivision définie par

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n}, \quad k = 0, \dots, n.$$

Définition (Fonction en escalier). Une fonction $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite **en escalier** s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ et des réels $c_0, \dots, c_{n-1}$ tels que

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \quad \forall x \in]x_k, x_{k+1}[, \quad \varphi(x) = c_k.$$

On note $\mathcal{E}([a, b])$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$.

Définition (Intégrale d'une fonction en escalier). Soit $\varphi \in \mathcal{E}([a, b])$ associée à une subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$. On appelle **intégrale de** φ **sur** $[a, b]$ la quantité

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx = \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x_{k+1} - x_k).$$

Propriétés fondamentales. Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{E}([a, b])$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
- $\displaystyle\int_a^b (\varphi + \psi) = \int_a^b \varphi + \int_a^b \psi$
- $\displaystyle\int_a^b \lambda\varphi = \lambda \int_a^b \varphi$
- Si $\varphi \geq 0$, alors $\displaystyle\int_a^b \varphi \geq 0$

Relation de Chasles. Pour tout $c \in [a, b]$:

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx = \int_a^c \varphi(x)\, dx + \int_c^b \varphi(x)\, dx.$$

2.2 Fonctions continues par morceaux

Définition. Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite **continue par morceaux** s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, \ldots, x_n)$ telle que :

- f est continue sur chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}[$,
- f admet des limites réelles à droite et à gauche en chaque x_k.

On note $\mathcal{C}^0_{pm}([a, b])$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$.

Remarques.

- Toute fonction continue est continue par morceaux :

$$\mathcal{C}^0([a, b]) \subset \mathcal{C}^0_{pm}([a, b]).$$

- Toute fonction en escalier est continue par morceaux :

$$\mathcal{E}([a, b]) \subset \mathcal{C}^0_{pm}([a, b]).$$

Intégrabilité. Toute fonction $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a, b])$ est intégrable sur $[a, b]$.

Positivité. Si $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a, b])$ et $f(x) \geq 0$ sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\, dx \geq 0.$$

La réciproque est fausse.

Inégalité de Cauchy–Schwarz. Pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{C}^0_{pm}([a, b])$:

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)\, dx \right| \leq \left(\int_a^b f(x)^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b g(x)^2 dx \right)^{1/2}.$$

Nullité de l'intégrale. Si f est continue, positive sur $[a, b]$ et

$$\int_a^b f(x)\, dx = 0,$$

alors f est identiquement nulle.

2.3 Sommes de Riemann

Proposition. Soit $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a, b])$. Alors :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n} \right) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

2.4 Primitives et intégrale définie

Définition (Primitive). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ est une **primitive** de f si

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I.$$

Théorème. Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.

Définition (Intégrale définie). Si f est continue sur $[a, b]$ et F une primitive de f, on définit

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Théorème fondamental de l'analyse. Si f est continue sur $[a, b]$ et

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt,$$

alors F est une primitive de f sur $[a, b]$.

2.5 Méthodes de calcul

Intégration par parties

Proposition. Si $f, g \in \mathcal{C}^1([a, b])$, alors :

$$\int_a^b f'(x)g(x)\, dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\, dx.$$

Changement de variable

Proposition. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1([a, b])$ strictement monotone et f continue sur $\varphi([a, b])$. Alors :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\, du = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\, dx.$$

2.6 Intégrales généralisées

Définition. Une intégrale est dite **généralisée** si :
— l'intervalle est infini ;
— ou la fonction n'est pas bornée.

Convergence. Une intégrale généralisée converge si la limite définissant l'intégrale existe et est finie.

Convergence absolue. Si
$$\int_a^b |f(x)|\,dx$$
converge, alors
$$\int_a^b f(x)\,dx$$
converge.

2.7 Intégrales usuelles

Intégrales de Riemann. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$:
$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx \text{ converge ssi } \alpha < 1, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx \text{ converge ssi } \alpha > 1.$$

Exponentielle.
$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}dx \text{ converge ssi } \alpha > 0.$$

Critère de comparaison. Soient f, g continues, positives sur $[a, b[$, avec $f \leq g$.
- Si $\int g$ converge, alors $\int f$ converge.
- Si $\int f$ diverge, alors $\int g$ diverge.

Théorème d'équivalence. Si $f(x) \sim g(x)$ au voisinage d'un point singulier, alors
$$\int f \text{ et } \int g \text{ sont de même nature.}$$

3 Formes bilinéaires, espaces euclidiens et endomorphismes remarquables

Dans tout ce chapitre, E désigne un espace vectoriel réel de dimension finie n.

3.1 Formes bilinéaires

Définition. Une application
$$\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$
est appelée **forme bilinéaire** si elle est linéaire par rapport à chacune de ses variables, c'est-à-dire :
$$\forall x, y, z \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \varphi(x + y, z) = \varphi(x, z) + \varphi(y, z), \\ \varphi(\lambda x, z) = \lambda \varphi(x, z), \end{cases}$$

et de même pour la seconde variable.

Exemples.

- Dans $\mathbb{R}^n$, l'application $(x, y) \mapsto x^\top y$ est une forme bilinéaire.
- L'application $(x, y) \mapsto 0$ est une forme bilinéaire.
- L'application $(x, y) \mapsto \|x\| \, \|y\|$ n'est pas bilinéaire.

Définition (Forme symétrique). Une forme bilinéaire φ est dite **symétrique** si :

$$\forall x, y \in E, \quad \varphi(x, y) = \varphi(y, x).$$

Définition (Forme antisymétrique). Une forme bilinéaire φ est dite **antisymétrique** si :

$$\forall x, y \in E, \quad \varphi(x, y) = -\varphi(y, x).$$

Propriété. Si φ est antisymétrique, alors :

$$\forall x \in E, \quad \varphi(x, x) = 0.$$

Réciproque. La réciproque est fausse en général.

3.2 Matrice associée à une forme bilinéaire

Définition. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et φ une forme bilinéaire. On appelle **matrice associée à φ dans la base $\mathcal{B}$** la matrice

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \big(\varphi(e_i, e_j)\big)_{1 \leq i,j \leq n}.$$

Expression matricielle. Si $x, y \in E$ ont pour coordonnées $X, Y \in \mathbb{R}^n$ dans la base $\mathcal{B}$, alors :

$$\varphi(x, y) = X^\top M_{\mathcal{B}}(\varphi) Y.$$

Changement de base. Si P est la matrice de passage d'une base $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{B}'$, alors :

$$M_{\mathcal{B}'}(\varphi) = P^\top M_{\mathcal{B}}(\varphi) P.$$

Symétrie matricielle.

$$\varphi \text{ est symétrique} \iff M_{\mathcal{B}}(\varphi)^\top = M_{\mathcal{B}}(\varphi).$$

3.3 Formes quadratiques

Définition. Une application $q : E \to \mathbb{R}$ est appelée **forme quadratique** s'il existe une forme bilinéaire symétrique φ telle que :

$$\forall x \in E, \quad q(x) = \varphi(x, x).$$

Remarque fondamentale. Une forme quadratique ne détermine pas une unique forme bilinéaire, mais elle détermine une unique forme bilinéaire symétrique associée.

Polarisation. La forme bilinéaire symétrique associée à q est donnée par :

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}\big(q(x + y) - q(x) - q(y)\big).$$

Expression matricielle. Dans une base $\mathcal{B}$:

$$q(x) = X^\top AX,$$

où A est une matrice symétrique réelle.

Exemple. Dans $\mathbb{R}^2$:

$$q(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2 \quad \iff \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3.4 Positivité des formes quadratiques

Définition. Une forme quadratique q est dite :
— **positive** si $\forall x,\ q(x) \geq 0$,
— **définie positive** si $\forall x \neq 0,\ q(x) > 0$,
— **négative** si $\forall x,\ q(x) \leq 0$,
— **indéfinie** sinon.

Lien matriciel. q est définie positive si et seulement si sa matrice associée est symétrique définie positive.

Critère de Sylvester. Une matrice symétrique réelle est définie positive si et seulement si tous ses mineurs principaux sont strictement positifs.

3.5 Diagonalisation des formes quadratiques

Théorème (Réduction de Gauss). Toute forme quadratique réelle peut être mise sous forme diagonale dans une base convenable :

$$q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2.$$

Signature. Le nombre de coefficients strictement positifs et strictement négatifs est invariant par changement de base.

Théorème d'inertie de Sylvester. La signature (p, q) d'une forme quadratique réelle est indépendante de la base choisie.

Cas particulier. Une forme quadratique est définie positive si et seulement si tous les coefficients diagonaux sont strictement positifs.

3.6 Applications géométriques

Classification des coniques. Les formes quadratiques permettent de classifier les coniques selon leur signature :

— ellipse,

— hyperbole,

— parabole (cas dégénéré).

Exemple.

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{ellipse}, \qquad x^2 - y^2 = 1 \quad \text{hyperbole}.$$

3.7 Produit scalaire

Définition. Un **produit scalaire** sur E est une forme bilinéaire symétrique $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ telle que :

— $\forall x \in E,\ \langle x, x \rangle \geq 0$,

— $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$.

Exemples.

— Dans $\mathbb{R}^n$:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

— Pour une matrice symétrique définie positive A :

$$\langle x, y \rangle_A = x^\top A y.$$

Norme associée. On définit :

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

3.8 Inégalités fondamentales

Inégalité de Cauchy–Schwarz. Pour tous $x, y \in E$:

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\|.$$

Démonstration. Considérer la fonction $t \mapsto \langle x + ty, x + ty\rangle$ et utiliser sa positivité.

Inégalité triangulaire.

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Distance. La distance associée est :

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

3.9 Espaces euclidiens

Définition. Un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire est appelé **espace euclidien**.

Orthogonalité. Deux vecteurs x, y sont orthogonaux si :

$$\langle x, y\rangle = 0.$$

Orthogonal d'un sous-espace. Pour un sous-espace $F \subset E$:

$$F^{\perp} = \{x \in E \mid \forall y \in F,\ \langle x, y\rangle = 0\}.$$

Propriétés.

$$F^{\perp} \text{ est un sous-espace de } E, \quad \dim F + \dim F^{\perp} = \dim E.$$

3.10 Bases orthonormées

Définition. Une base $(e_1, \ldots, e_n)$ est dite **orthonormée** si :

$$\langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Coordonnées. Dans une base orthonormée :

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Théorème de Gram–Schmidt. Toute base d'un espace euclidien peut être transformée en une base orthonormée.

3.11 Projecteurs orthogonaux

Définition (Projecteur). Un endomorphisme $p : E \to E$ est un projecteur si :

$$p^2 = p.$$

Définition (Projecteur orthogonal). Un projecteur p est dit orthogonal s'il est symétrique :

$$\langle p(x), y\rangle = \langle x, p(y)\rangle.$$

Décomposition orthogonale. Pour tout sous-espace F :

$$E = F \oplus F^{\perp}.$$

Projection orthogonale. Pour tout $x \in E$, il existe un unique $p_F(x) \in F$ tel que :

$$x = p_F(x) + (x - p_F(x)), \quad x - p_F(x) \in F^{\perp}.$$

Distance à un sous-espace.

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\|.$$

3.12 Symétries orthogonales

Définition. Une **symétrie** est un endomorphisme s tel que :

$$s^2 = \mathrm{Id}.$$

Symétrie orthogonale. La symétrie orthogonale par rapport à F est :

$$s_F(x) = 2p_F(x) - x.$$

3.13 Endomorphismes symétriques

Définition. Un endomorphisme $u : E \to E$ est dit **symétrique** si :

$$\forall x, y \in E, \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle.$$

Lien matriciel. Dans une base orthonormée, la matrice de u est symétrique.

Propriété spectrale. Toutes les valeurs propres d'un endomorphisme symétrique sont réelles.

Orthogonalité des sous-espaces propres. Deux sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

3.14 Théorème spectral

Théorème spectral réel. Tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien :
- — est diagonalisable,
- — admet une base orthonormée de vecteurs propres.

Conséquence matricielle. Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable par une matrice orthogonale.

3.15 Applications

Moindres carrés. Le problème

$$\min_{y \in F} \|x - y\|$$

admet une solution unique : la projection orthogonale de x sur F.

Interprétation géométrique. La projection orthogonale est le meilleur approximant de x dans F au sens de la norme euclidienne.