APPLICATIONS

Exercice 1. Déterminer, si c'est possible, $f(\mathbb{R}_+)$, $f(\mathbb{R}_-)$, $f(\{-1\})$, $f^{-1}(\mathbb{R}_+)$, $f^{-1}(\mathbb{R}_-)$, $f^{-1}(\{-1\})$ pour les fonctions suivantes :

a) $f(x) = e^x$

b) $f(x) = \ln(x)$

A faire chez soi

c) $f(x) = \cos(x)$

Exercice 2. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.

1. Déterminer les ensembles suivants :

   (a) $f([-3;-1])$

   (b) $f([-2;1])$

   (c) $f([-3;-1] \cup [-2;1])$

   (d) $f([-3;-1] \cap [-2;1])$.

   Les comparer.

2. Mêmes questions pour les ensembles :

   (a) $f^{-1}(]-\infty;2])$

   (b) $f^{-1}([1;+\infty[)$

   (c) $f^{-1}(]-\infty;2] \cup [1;+\infty[)$

   (d) $f^{-1}(]-\infty;2] \cap [1;+\infty[)$

Exercice 3. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \min(x^2, 3)$. Déterminer les ensembles suivants :

a) $f(\mathbb{R})$

b) $f([0,1])$

c) $f([1,2])$

d) $f([2,+\infty[)$

e) $f^{-1}([0;1])$

f) $f^{-1}([4;+\infty[)$

Exercice 4. Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

1. $n \mapsto n+1$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
2. $x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$ de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ dans $\mathbb{R}$.
3. $(x;y) \mapsto (1; x-y; y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.
4. $(x;y;z) \mapsto (x+y+z; x-y-z; x)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.
5. $(x;y) \mapsto (x+y; xy)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

A faire chez soi

7. $n \mapsto n+1$ de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$.
8. $(x;y) \mapsto 2y$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
9. $(x;y) \mapsto (x; xy - y^3)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5.
Soit

$$f_1 : \begin{cases} A_1 = \mathbb{R} \setminus \{0\} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \dfrac{1}{x} \end{cases} \qquad f_2 : \begin{cases} A_2 = \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x). \end{cases} \qquad f_3 : \begin{cases} A_3 = \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 + x. \end{cases}$$

1. (a) Tracer la courbe représentative de f_1

(b) Dire si f_1 est injective, surjective, bijective.

(c) Si f_1 n'est pas bijective, déterminer des ensembles E_1 et F_1 tels que la restriction de f_1 à ces ensembles soit une bijection.

(d) Déterminer les ensembles $f_1(A_1)$, $f_1(]0;2])$, $f_1^{-1}(]-1,1[)$.

2. Mêmes questions pour f_2.
3. Déterminer les plus grands ensemble de définition et l'expression des applications suivantes :

$$f_2 \circ f_1 \quad \text{et} \quad f_1 \circ f_2.$$

A faire chez soi

4. (a) Tracer la courbe représentative de f_3

(b) Dire si f_3 est injective, surjective, bijective.

(c) Si f_3 n'est pas bijective, déterminer des ensembles E_2 et F_2 tels que la restriction de f_3 à ces ensembles soit une bijection.

(d) Déterminer les ensembles $f_3(A_2)$, $f_3(]0;2])$, $f_3^{-1}(]-1,1[)$.

(e) Déterminer les plus grands ensemble de définition et l'expression des applications suivantes :

$$f_3 \circ f_1 \quad \text{et} \quad f_1 \circ f_3.$$

Exercice 6. Soit $f : E \to F$ l'application définie par

$$f(x) = |1+x| + |1-x| - 2.$$

1. On suppose que $E = F = \mathbb{R}$.

(a) Étant donné un réel x_0, comparer $f(x_0)$ et $f(-x_0)$. La fonction f est-elle injective ?

(b) Donner les différentes expressions de f (en supprimant les valeurs absolues). Représenter graphiquement la fonction f.

(c) Déterminer $f(\mathbb{R})$. La fonction f est-elle surjective ?

2. On suppose que $E = [1, +\infty[$ et $F = \mathbb{R}_+$. Donner l'expression de f et déterminer, si elle existe, l'application réciproque f^{-1} de F dans E.

Exercice 7. On considère les applications

$$\left\{ \begin{array}{cccc} f: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & n & \mapsto & f(n) = 2n \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{cccc} g: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & n & \mapsto & g(n) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\ n & \text{si } n \text{ impair} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

1. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
2. Mêmes questions pour g.
3. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.

A faire chez soi

Exercice 8. 1. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $[-1;1]$ définie par

$$f(x) = \sin(\pi x).$$

L'application f est-elle injective, surjective, bijective ?

2. On note g la restriction de f à $\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$. Montrer que g est une application bijective de $\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$ sur $]-1;1[$.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{3\}$ l'application définie par $\dfrac{3x+1}{x-2}$.

1. Déterminer $f([0,2[\cup]2,4])$.

2. Déterminer $f^{-1}([0,3[\cup]3,4])$.
3. Montrer que f est une bijection et déterminer sa réciproque.

Exercice 10. On considère l'ensemble des être humains.

1. À chaque individu on lui associe « sa mère ». Cela définit-il une application ?
2. Si oui, est-elle injective, surjective, bijective ?
3. Mêmes questions avec « sa sœur ».

Exercice 11. Soit $f : E \to F$ une application, A et B deux parties de E, C et D deux parties de F. Montrer que :

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(b) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

(c) $f(A \cap f^{-1}(C)) = f(A) \cap C$.

A faire chez soi

(d) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

(e) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

Exercice 12. Soit $f : E \to F$ une application, A et B deux parties de E, C et D deux parties de F. Montrer que :

1. $A \subset f^{-1}(f(A))$.
2. $f(f^{-1}(C)) = f(E) \cap C$.
3. f est injective $\Longleftrightarrow \forall A \subset E,\ A = f^{-1}(f(A))$.
4. f est surjective $\Longleftrightarrow \forall C \subset F,\ f(f^{-1}(C)) = C$.

Exercice 13. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Montrer les implications suivantes :

1) $g \circ f$ est surjective $\Longrightarrow g$ est surjective.

2) $g \circ f$ est injective $\Longrightarrow f$ est injective.

3) $g \circ f$ est surjective et g est injective $\Longrightarrow f$ est surjective.

4) $g \circ f$ est injective et f est surjective $\Longrightarrow g$ est injective.

Exercice 14. Soit $f : E \to F$, $g : F \to G$, et $h : G \to E$ trois applications telles que $h \circ g \circ f$ injective, $g \circ f \circ h$ injective et $f \circ h \circ g$ surjective. Montrer que f, g et h sont bijectives.

Exercice 15. Soit $f : E \to F$ une application. Montrer l'équivalence suivante :

$$(f \text{ est bijective}) \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall A \subset E,\ f(A^c) = f(A)^c)$$

A faire chez soi

Exercice 16. Soit $f : E \to F$,$g : F \to G$ et $h : G \to H$ trois applications. Montrer que :

$$(g \circ f \text{ et } h \circ g \text{ sont bijectives}) \quad \Longleftrightarrow \quad (f,\ g \text{ et } h \text{ sont bijectives})$$

Exercice 17. Soit $f : E \to F$ une application. Montrer l'implication suivante : Si f est **surjective** alors pour tout ensemble G et toutes applications g, $h : F \longrightarrow G$,

$$g \circ f = h \circ f \quad \Longrightarrow \quad g = h$$

Pour aller plus loin

Exercice 18. Soit A, B, C trois parties d'un ensemble E.

1. Déterminer $\mathbb{1}_{A\setminus B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.
2. Déterminer $\mathbb{1}_{A\Delta B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.
3. Quand est-il vrai que $A\Delta(B\cap C) = (A\Delta B)\cap(A\Delta C)$?

Exercice 19. Soit la fonction f

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C}\setminus\{0\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{1}{z} + z. \end{aligned}$$

1. L'application f est-elle injective, surjective, bijective ?
2. Déterminer l'image par f du cercle unité (centre 0 et rayon 1).
3. Déterminer l'image réciproque par f de $i\mathbb{R}$.