RELATIONS

Exercice 1. Les relations suivantes sont-elles symétriques, réflexives, transitives ?

1. Sur $\mathbb{R}$, l'égalité.
2. Sur $\mathbb{R}$, l'ordre strict $<$.
3. Sur $\mathbb{R}$, l'ordre $\leq$.
4. Sur $\mathbb{R}$, la relation « avoir le même carré » .
5. Sur $\mathbb{R}$, la relation « avoir le même sinus » .
6. Sur l'ensemble des droites du plan, le parallélisme.
7. Sur l'ensemble des droites du plan, l'orthogonalité.

Exercice 2. Étudier les propriétés des relations suivantes. Dans le cas d'une relation d'équivalence, préciser les classes. Dans le cas d'une relation d'ordre, préciser si elle est totale et si l'ensemble admet un plus petit ou un plus grand élément.

1. Soit E un ensemble, on définit sur $P(E)$:
$$A\mathscr{R}B \iff A \subset B.$$
2. Soit E un ensemble, on définit sur $P(E)$:
$$A\mathscr{R}B \iff A \cap B = \emptyset.$$
3. Sur $\mathbb{Z}$ on définit : $a\mathscr{R}b \iff a$ et b ont la même parité.
4. Sur $\mathbb{Z}$ on définit : $a\mathscr{R}b \iff \exists n \in \mathbb{N},\ a - b = 3n.$
5. Sur $\mathbb{Z}$ on définit : $a\mathscr{R}b \iff a - b$ est divisible par 3.
6. Sur $\mathbb{R}$ on définit :
$$x\mathscr{R}y \iff x^2 - y^2 = x - y.$$

Exercice 3. Soit deux ensembles E et F et deux relations d'équivalences $\mathscr{R}$ sur E et $\mathscr{S}$ sur F. On définit alors sur $E \times F$ la relation :
$$(x, y) \sim (x', y') \iff x\mathscr{R}x' \quad \text{et } y\mathscr{S}y'$$
Vérifier que $\sim$ est une relation d'équivalence.

Exercice 4.

1. On définit une relation binaire $\preccurlyeq$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par
$$x \preccurlyeq y \iff \exists n \in \mathbb{N}, \quad y = x^n.$$
Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre. Cet ordre est-il total ?
2. Soit $\preccurlyeq$ la relation définie sur $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\}$ par
$$(x, y) \preccurlyeq (x', y') \iff (x, y) = (x', y') \quad \text{ou} \quad y \leq x'.$$
Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur E.
3. Soit E un ensemble et $f : E \to \mathbb{R}$ une application injective. On définit sur E une relation binaire par
$$x \preccurlyeq y \iff f(x) \leq f(y).$$
Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur E.

Exercice 5. On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation :
$$(x, y) \ll (x', y') \iff |x - x'| \leq y' - y.$$

1. Vérifier que c'est une relation d'ordre.
2. Dessiner les ensembles des majorants et des minorants d'un couple (a, b).
3. L'ordre est-il total ?

Exercice 6. Soit $n > 0$ un entier et $\equiv_n$ la relation binaire définie sur $\mathbb{Z}$ par :

$$a \equiv_n b \quad \Longleftrightarrow \quad n \text{ divise } a - b.$$

On parle d'égalité modulo n, aussi notée $a \equiv b \bmod n$ ou $a \equiv b\ [n]$.

1. Montrer que $\equiv_n$ est une relation d'équivalence.
2. Combien existe-t-il de classes d'équivalence ? Donner un système de représentants.

Pour aller plus loin

3. Montrer que $\equiv_n$ est compatible avec l'addition et la multiplication de $\mathbb{Z}$.

Exercice 7. Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble X. $\forall x \in X$, on note $[x]$ sa classe d'équivalence. Montrer que :

1. $\forall x \in X$, $x \in [x]$.
2. $\forall (x, y) \in X^2$ on a
$$x \in [y] \Longleftrightarrow y \in [x] \Longleftrightarrow [x] = [y] \Longleftrightarrow [x] \cap [y] \neq \emptyset.$$

A faire chez soi

Exercice 8. Étudier la relation $\mathscr{R}$ définie sur l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f \mathscr{R} g \quad \Longleftrightarrow \quad \Big(\exists A > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x| > A \implies f(x) = g(x) \Big),$$

c'est-à-dire, la signifie que la fonction f est en relation avec g si et seulement si les deux fonctions sont égales à partir d'un certain rang (« à partir de un certain moment »).

Exercice 9. Soit E un ensemble et $\mathscr{R}$ une relation binaire sur E, réflexive et transitive. On définit la relation :

$$x \mathscr{S} y \quad \Longleftrightarrow \quad (x \mathscr{R} y \quad \text{et} \quad y \mathscr{R} x)$$

Les relations $\mathscr{S}$ et $\mathscr{T}$ sont-elles des relations d'équivalence ?

Exercice 10. Soit $\mathscr{R}$ une relation symétrique et réflexive sur un ensemble X. On définit une relation $\mathscr{S}$ sur X par :

$$x \mathscr{S} y \Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{N},\ \exists z_0,\ \cdots\ ,\ \exists z_n \in X \text{ tels que } \begin{cases} z_0 = x \\ z_n = y \\ \forall\ 0 \leq i \leq n-1,\ (z_i \mathscr{R} z_{i+1}) \end{cases}$$

Montrer que $\mathscr{S}$ est une relation d'équivalence.