ENSEMBLES

Exercice 1. Soient A et B deux parties de E.

1. Montrer que $(A^c)^c = A$
2. Soit $A \subset B$. Montrer que $B^c \subset A^c$.
3. Montrer les « **Lois de Morgan** » :

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \quad \text{et} \quad (A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

Exercice 2. Soit A, B, C, D des parties d'un ensemble E.
Montrer que :

1. $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.
2. $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$.
3. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
4. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Exercice 3. Soit A et B deux parties d'un ensemble E.

1. Montrer :
   a) $A \subset B \Longleftrightarrow A \cup B = B$
   b) $A \subset B \Longleftrightarrow A^c \cup B = E$
2. En déduire :
   a) $A \subset B \Longleftrightarrow A \cap B = A$
   b) $A \subset B \Longleftrightarrow A \cap B^c = \emptyset$

Exercice 4. Soient A, B, C trois ensembles. Montrer que

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
3. $A \cup B = A \cap C \Longleftrightarrow B \subset A \subset C$.
4. $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.

Exercice 5. Soit E et F deux ensembles. Quelle relation y a-t-il entre :

1. $P(E \cup F)$ et $P(E) \cup P(F)$?
2. $P(E \cap F)$ et $P(E) \cap P(F)$?
3. $P(E \times F)$ et $P(E) \times P(F)$?

Exercice 6. Soit $A = \{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4\}$ et $B = \{b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5\}$.

1. Écrire le produit cartésien $A \times B$.
2. Quel est le nombre de parties de $A \times B$?

Exercice 7. Soit E et F deux ensembles. Tous les sous-ensembles de $E \times F$ sont-ils de la forme $A \times B$ avec $A \subset E$ et $B \subset F$?

Exercice 8. Soient A, B, C, D quatre ensembles.

1. Montrer que $(A \times C) \cup (B \times C) = (A \cup B) \times C$.
2. Montrer que $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$.

Exercice 9. Soient deux sous-ensembles A et B d'un ensemble E. Soit Δ la différence symétrique dans $P(E)$ définie par $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

1. Montrer que $A\Delta B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$
2. Montrer que $A\Delta B = B\Delta A$.
3. Montrer que $A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$.
4. Que valent $A\Delta\emptyset$ et $A\Delta A$ et $A\Delta B$ quand $A \subset B$?

A faire chez soi

Exercice 10. 1. Montrer que $\begin{cases} A \cup B \subset A \cup C \\ A \cap B \subset A \cap C \end{cases} \implies B \subset C.$

2. On suppose que $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$. Que peut-on dire de B et C ?

Exercice 11. Soit A, B, C trois parties d'un ensemble E.

1. Montrer que $A \cap B = A \cup B \iff A = B$.
2. Montrer que $A \cap B = A \cap C \iff A \cap B^c = A \cap C^c$.
3. Montrer que $(A \cup B) \setminus (A \cup C) \subset (B \setminus C)$. Donner un contre-exemple pour l'inclusion contraire.

Exercice 12. Simplifier les expressions suivantes où A, B et C sont des parties d'un ensemble E :

1. $A \cap (A^c \cup B)$
2. $A \cup (A^c \cap B)$
3. $A \cap (A^c \cup B) \cap (A^c \cup B^c \cup C)$
4. $A \cup (A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$

Pour aller plus loin

Exercice 13. Soit $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_i)_{i\in I}$ deux familles de parties d'un ensemble E. On suppose que pour tout indice i de I, on a $E = A_i \cup B_i$. Montrer que

$$E = \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \bigcup \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right).$$

Exercice 14. Soient$A$, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer que

$$(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C).$$