CY Tech

TD Algèbre

Ensemble.

Exercice 1

Soient A et B deux parties de E.

1. Montrer que $(A^c)^c = A$
2. Soit $A \subset B$. Montrer que $B^c \subset A^c$.
3. Montrer les « **Lois de Morgan** » **:**

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \quad \text{et} \quad (A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

Exercice 1

1. Montrons

$$(A^c)^c = A.$$

Solution : Par définition

$$x \in A^c \Longleftrightarrow x \notin A.$$

Il en résulte donc par négation

$$x \notin A^c \Longleftrightarrow x \in A.$$

Ce qui est équivalente à

$$x \in (A^c)^c \Longleftrightarrow x \in A.$$

D'où on conclut $(A^c)^c = A$.

Exercice 1

2. Soit $A \subset B$. Montrer que

$$B^c \subset A^c.$$

Solution :Supposons que $A \subset B$ et montrons $B^c \subset A^c$. Par hypothèse

$$x \in A \implies x \in B.$$

Cette proposition est équivalente à sa contraposée :

$$x \notin B \implies x \notin A.$$

Ce qui est équivalente à

$$x \in B^c \Longrightarrow x \in A^c.$$

On a ainsi montré que si $A \subset B$, alors $B^c \subset A^c$.

Exercice 1

3. Montrons les « **Lois de Morgan** » **:**

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \quad \text{et} \quad (A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

Solution :Commeçons par montrer $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$. Par définition

$$x \in A \cap B \iff (x \in A) \ \text{ et } \ (x \in B).$$

Il en résulte par négation

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B)^c \iff x \notin A \cap B \quad &\iff \quad (x \notin A) \ \text{ ou } \ (x \notin B) \\ &\iff \quad (x \in A^c) \ \text{ ou } \ (x \in B^c), \end{aligned}$$

ce qui s'écrit

$$x \in (A \cap B)^c \iff x \in A^c \cup B^c.$$

Nous avons donc montré

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Exercice 1

Pour la deuxième égalité, on pose

$$C = A^c \quad \text{et} \quad D = B^c.$$

D'après la première égalité, nous avons

$$(C \cap D)^c \; = \; C^c \cup D^c,$$

et en prenant le complémentaire, on obtient.

$$C \cap D \; = \; ((C \cap D)^c)^c \; = \; (C^c \cup D^c)^c \, .$$

Ainsi, en remplaçant C par A^c et D par B^c, on conclut

$$A^c \cap B^c \; = \; ((A^c)^c \cup (B^c)^c)^c \; = \; (A \cup B)^c.$$

Nous avons donc montré

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

Exercice 2

Soit A, B, C, D des parties d'un ensemble E. Montrer que :

1. $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.
2. $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$.
3. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
4. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Rappelons que

$$A \setminus B = \{x \in E : x \in A \quad \text{et} \quad x \notin B\} = A \cap B^c.$$

Solution : On a

$$\begin{aligned}
(A \setminus B) \setminus C &= (A \setminus B) \cap C^c \\
&= (A \cap B^c) \cap C^c \\
&= A \cap (B^c \cap C^c) \\
&\underbrace{=}_{\textbf{par la loi de Morgan}} A \cap (B \cup C)^c \\
&= A \setminus (B \cup C).
\end{aligned}$$

Exercice 2

Montrons l'égalité

$$(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$$

Solution : On a

$$\begin{aligned}
(A \setminus B) \cap (C \setminus D) &= (A \cap B^c) \cap (C \cap D^c) \\
&= (A \cap C) \cap (B^c \cap D^c) \\
&\underbrace{=}_{\textbf{par la loi de Morgan}} (A \cap C) \cap (B \cup D)^c \\
&= (A \cap C) \setminus (B \cup D).
\end{aligned}$$

Exercice 2

Montrons l'égalité

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Solution : On a

$$\begin{array}{rcl} A \setminus (B \cap C) & = & A \cap (B \cap C)^c \\ & \underbrace{=}_{\textbf{par la loi de Morgan}} & A \cap (B^c \cup C^c) \\ & = & (A \cap B^c) \cup (A \cap C^c) \\ & = & (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \end{array}$$

Exercice 2

Montrons l'égalité

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

Solution : On a

$$\begin{aligned} A \setminus (B \cup C) &= A \cap (B \cup C)^c \\ &\underbrace{=}_{\textbf{par la loi de Morgan}} A \cap (B^c \cap C^c) \\ &= (A \cap A) \cap (B^c \cap C^c) \\ &= (A \cap B^c) \cap (A \cap C^c) \\ &= (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \end{aligned}$$

Exercice 3

Soit A et B deux parties d'un ensemble E.

- Montrer :

$$A \subset B \Longleftrightarrow A \cup B = B$$

  et

$$A \subset B \Longleftrightarrow A^c \cup B = E$$

- En déduire :

$$A \subset B \Longleftrightarrow A \cap B = A$$

  et

$$A \subset B \Longleftrightarrow A \cap B^c = \emptyset$$

Exercice 3

Montrons

$$A \subset B \iff A \cup B = B$$

Solution : On raisonne par double implication.

- $\Longrightarrow$: Supposons $A \subset B$ et montrons la proposition

  $$A \cup B = B.$$

  On raisonne par double inclusion :

  - Clairement, $B \subset A \cup B$.
  - Montrons que $A \cup B \subset B$. Par définition

    $$x \in A \cup B \quad \iff \quad x \in A \subset B \quad \text{ou} \quad x \in B \quad \Longrightarrow \quad x \in B.$$

    Donc $A \cup B \subset B$.
- $\Longleftarrow$: Supposons $A \cup B = B$ et montrons la proposition

  $$A \subset B.$$

  On a

  $$A \subset A \cup B = B \quad \Longrightarrow \quad A \subset B.$$

Exercice 3

Montrons

$$A \subset B \iff A^c \cup B = E$$

Solution : On raisonne par double implication.

- $\Longrightarrow$: Supposons $A \subset B$ et montrons la proposition

  $$A^c \cup B = E.$$

  On raisonne par double inclusion :

  - Clairement, $A^c \cup B \subset E$.
  - Montrons que $E \subset A^c \cup B$. Comme $A \subset B$, on peut écrire

    $$E = A \cup A^c \subset B \cup A^c = A^c \cup B.$$

- $\Longleftarrow$: Supposons $A^c \cup B = E$ et montrons la proposition

  $$A \subset B.$$

  On a $A \subset E = A^c \cup B$. Donc

  $$x \in A \subset A^c \cup B \quad \Longleftrightarrow \quad x \in A^c \quad \text{ou} \quad x \in B.$$

  Mais comme $x \in A$, on conclut $x \notin A^c$ et donc $x \in B$. Par conséquent $A \subset B$.

Exercice 3

En déduire

$$A \subset B \iff A \cap B = A$$

On a

$$\begin{aligned} A = A \cap B \quad & \underbrace{\iff}_{\text{d'après les lois de Morgan}} \quad A^c = A^c \cup B^c \\ & \underbrace{\iff}_{\text{d'après la question précédente}} \quad B^c \subset A^c \\ & \underbrace{\iff}_{\text{par contraposition}} \quad A \subset B. \end{aligned}$$

En déduire

$$A \subset B \iff A \cap B^c = \emptyset$$

On a

$$\begin{aligned} A \cap B^c = \emptyset \quad & \underbrace{\iff}_{\text{d'après les lois de Morgan}} \quad A^c \cup B = \emptyset^c = E \\ & \underbrace{\iff}_{\text{d'après la question précédente}} \quad A \subset B. \end{aligned}$$

Exercice 4

Soient A, B, C trois ensembles. Montrer que

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
2. $A \cup B = A \cap C \iff B \subset A \subset C$.
3. $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.

Exercice 4

Montrer que

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Preuve : On a

$$\begin{aligned}
x \in A \cup (B \cap C) &\iff x \in A \ \text{ ou } \ x \in (B \cap C) \\
&\iff x \in A \ \text{ ou } \ (x \in B \ \text{ et } \ x \in C)) \\
&\underbrace{\iff}_{\substack{\text{par distributivité de} \\ \textbf{ou} \text{ par rapport à } \textbf{et}}} (x \in A \ \text{ ou } \ x \in B) \ \text{ et } \ (x \in A \ \text{ ou } \ x \in C) \\
&\iff x \in A \cup B \ \text{ et } \ x \in A \cup C \\
&\iff x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Exercice 4

Montrer que

$$A \cup B = A \cap C \iff B \subset A \subset C.$$

Preuve : On raisonne par double implication.

- $\Longrightarrow$: Supposons que $A \cup B = A \cap C$. Montrons la suite de contentions

  $$B \subset A \subset C.$$

  Supposons $x \in B$. On a

  $$x \in B \implies x \in A \cup B = A \cap C \implies x \in A.$$

  D'où on conclut que $B \subset A$. Maintenat, soit $x \in A$. Alors

  $$x \in A \implies x \in A \cup B = A \cap C \implies x \in C.$$

  D'où on conclut que $A \subset C$. Par conséquent $B \subset A \subset C$.

- $\Longleftarrow$: Supposons que $B \subset A \subset C$. Montrons l'égalité

  $$A \cup B = A \cap C.$$

  On a

  $$B \subset A \Longrightarrow A \cup B = A \quad \text{et} \quad A \subset C \Longrightarrow A \cap C = A.$$

  D'où on conclut que $A \cup B = A = A \cap C$.

Exercice 4

Montrer que

$$(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A).$$

Preuve : On a

$$\begin{aligned}
(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) &= (B \cup A) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) \\
&\underbrace{=}_{\substack{\text{par distributivité de} \\ \cup \text{ par rapport à } \cap}} [B \cup (A \cap C)] \cap (C \cup A) \\
&\underbrace{=}_{\substack{\text{par distributivité de} \\ \cap \text{ par rapport à } \cup}} [B \cap (C \cup A)] \cup [(A \cap C) \cap (C \cup A)] \\
&\underbrace{=}_{\substack{\text{par distributivité de} \\ \cap \text{ par rapport à } \cup}} [(B \cap C) \cup (B \cap A)] \cup [(A \cap C) \cap (C \cup A)].
\end{aligned}$$

Mais $A \cap C \subset C \cup A$, donc $(A \cap C) \cap (C \cup A) = A \cap C$. D'où

$$\begin{aligned}
(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) &= [(B \cap C) \cup (B \cap A)] \cup [(A \cap C) \cap (C \cup A)] \\
&= (B \cap C) \cup (B \cap A) \cup (A \cap C) \\
&= (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A).
\end{aligned}$$

Exercice 5

Soit E et F deux ensembles. Quelle relation y a-t-il entre :

1. $\mathscr{P}(E \cup F)$ et $\mathscr{P}(E) \cup \mathscr{P}(F)$?
2. $\mathscr{P}(E \cap F)$ et $\mathscr{P}(E) \cap \mathscr{P}(F)$?
3. $\mathscr{P}(E \times F)$ et $\mathscr{P}(E) \times \mathscr{P}(F)$?

Exercice 5

Quelle relation y a-t-il entre :

$$\mathscr{P}(E \cup F) \quad \text{et} \quad \mathscr{P}(E) \cup \mathscr{P}(F)?$$

Solution : Montrons que

$$\mathscr{P}(E) \cup \mathscr{P}(F) \subset \mathscr{P}(E \cup F).$$

On a

$$\begin{aligned}
A \in \mathscr{P}(E) \cup \mathscr{P}(F) \quad & \Longrightarrow \quad A \in \mathscr{P}(E) \quad \text{ou} \quad A \in \mathscr{P}(F) \\
& \Longrightarrow \quad A \subset E \quad \text{ou} \quad A \subset F \\
& \Longrightarrow \quad A \subset E \cup F \\
& \Longrightarrow \quad A \in \mathscr{P}(E \cup F).
\end{aligned}$$

D'où on conclut que $\mathscr{P}(E) \cup \mathscr{P}(F) \subset \mathscr{P}(E \cup F)$. Ce n'est une égalité que si $E \subset F$ ou $F \subset E$. En effet, si $E = \{a, b\}$ et $F = \{c, d\}$ alors

$$E \cup F = \{a, b, c, d\} \notin \mathscr{P}(E) \cup \mathscr{P}(F).$$

Exercice 5

Quelle relation y a-t-il entre :

$$\mathscr{P}(E \cap F) \quad \text{et} \quad \mathscr{P}(E) \cap \mathscr{P}(F)?$$

Solution : Montrons que

$$\mathscr{P}(E \cap F) = \mathscr{P}(E) \cap \mathscr{P}(F).$$

On a

$$\begin{aligned}
A \in \mathscr{P}(E) \cap \mathscr{P}(F) \quad & \Longleftrightarrow \quad A \in \mathscr{P}(E) \quad \text{et} \quad A \in \mathscr{P}(F) \\
& \Longleftrightarrow \quad A \subset E \quad \text{et} \quad A \subset F \\
& \Longleftrightarrow \quad A \subset E \cap F \\
& \Longleftrightarrow \quad A \in \mathscr{P}(E \cap F).
\end{aligned}$$

D'où on conclut que $\mathscr{P}(E) \cap \mathscr{P}(F) = \mathscr{P}(E \cap F)$.

Exercice 5

Quelle relation y a-t-il entre :

$$\mathscr{P}(E \times F) \quad \text{et} \quad \mathscr{P}(E) \times \mathscr{P}(F)?$$

Solution : Notons que :

- un élément de $\mathscr{P}(E) \times \mathscr{P}(F)$ est un couple

$$(A, B) \quad \text{ou} \quad A \subset E \ \text{ et } \ B \subset F.$$

- un élément de $\mathscr{P}(E \times F)$ est un sous-ensemble de $E \times F$:

$$\begin{aligned} C \in \mathscr{P}(E \times F) \quad & \Longleftrightarrow \quad C \subset E \times F \\ & \Longleftrightarrow \quad C = \Big\{(x, y) : x \in E \ \text{ et } \ y \in F\Big\}. \end{aligned}$$

Ceci implique que ces deux ensembles ne sont pas comparables car ne contiennent pas les mêmes objets. Il n'y a donc pas d'inclusion entre $\mathscr{P}(E \times F)$ et $\mathscr{P}(E) \times \mathscr{P}(F)$.

Exercice 6

Soit

$$A = \{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4\} \quad \text{et} \quad B = \{b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5\}.$$

1. Écrire le produit cartésien $A \times B$.
2. Quel est le nombre de parties de $A \times B$?

Solution :

1. On a

$$\begin{aligned} A \times B = \Big\{ & (a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_1, b_4), (a_1, b_5) \\ & (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3), (a_2, b_4), (a_2, b_5) \\ & (a_3, b_1), (a_3, b_2), (a_3, b_3), (a_3, b_4), (a_3, b_5) \\ & (a_4, b_1), (a_4, b_2), (a_4, b_3), (a_4, b_4), (a_4, b_5) \Big\} \end{aligned}$$

2. Pour trouver le nombre de parties de $A \times B$, on utilise le résultat suivant

Proposition

Soit E un ensemble à n éléments. Alors, l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties de E est fini, et a 2^n éléments.

Exercice 6

Maintenant $A \times B$ est un ensemble à 20 éléments, il y a donc

$$2^{20} \quad \text{parties.}$$

Exercice 7

Soit E et F deux ensembles. Tous les sous-ensembles de $E \times F$ sont-ils de la forme

$$A \times B \quad \text{avec} \quad A \subset E \quad \text{et} \quad B \subset F?$$

Solution : Non. Par exemple, soit $E = F = \mathbb{R}$ et considérons le cercle unité

$$\mathscr{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \subset E \times F = \mathbb{R}^2.$$

Montrons que $\mathscr{C}$ ne s'écrit pas sous la forme $A \times B$ pour $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$. On raisonne par l'absurde. Supposons donc $\mathscr{C} = A \times B$ et essayons de trouver une contradiction. Si $\mathscr{C} = A \times B$ alors

- $0 \in A$, car $(0, 1) \in \mathscr{C}$.
- $0 \in B$, car $(1, 0) \in \mathscr{C}$.

Donc

$$(0, 0) \in A \times B.$$

Mais $(0, 0) \notin \mathscr{C}$. Contradiction ! Par conséquent $\mathscr{C}$ ne s'écrit pas sous la forme $A \times B$ pour $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$.

Exercice 7

On peut aussi choisir

$$\mathscr{C} = \{(1,0),(0,1)\}.$$

Si $C = A \times B$, alors

$$\{0,1\} \subset A \quad \text{et} \quad \{0,1\} \subset B,$$

pourtant

$$(0,0) \notin \mathscr{C}.$$

Exercice 8

Soient $A,\ B,\ C,\ D$ quatre ensembles.

1. Montrer que $(A \times C) \cup (B \times C) = (A \cup B) \times C$.
2. Montrer que $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$.

Solution : Montrons que

$$(A \times C) \cup (B \times C) = (A \cup B) \times C.$$

On a

$$\begin{aligned}
(x,y) \in (A \times C) \cup (B \times C) &\iff (x,y) \in A \times C \quad \text{ou} \quad (x,y) \in B \times C \\
&\iff (x \in A \ \text{ et } \ y \in C) \ \text{ ou } \ (x \in B \ \text{ et } \ y \in C) \\
&\iff (x \in A \text{ ou } x \in B) \quad \text{et} \quad y \in C \\
&\iff x \in A \cup B \quad \text{et} \quad y \in C \\
&\iff (x,y) \in (A \cup B) \times C.
\end{aligned}$$

Par conséquent $(A \times C) \cup (B \times C) = (A \cup B) \times C$.

Exercice 8

Montrons que

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D).$$

Solution : On a

$$\begin{aligned}
(x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D) &\iff (x, y) \in A \times B \quad \text{et} \quad (x, y) \in C \times D \\
&\iff (x \in A \ \text{ et } \ y \in B) \ \text{ et } \ (x \in C \ \text{ et } \ y \in D) \\
&\iff (x \in A \ \text{ et } \ x \in C) \ \text{ et } \ (y \in B \ \text{ et } \ y \in D) \\
&\iff x \in A \cap C \ \text{ et } \ y \in B \cap D \\
&\iff (x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D).
\end{aligned}$$

Exercice 9

Soit Δ la différence symétrique dans $\mathscr{P}(E)$.

1. Montrer que $A\Delta B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$
2. Montrer que $A\Delta B = B\Delta A$.
3. Montrer que $A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$.
4. Que valent $A\Delta\emptyset$, $A\Delta A$, et $A\Delta B$ quand $A \subset B$?

Solution : Commençons par rappeller la définition de la différence symétrique. Soient A et B deux ensembles. Alors

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} A\Delta B = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c &= (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) \\ &= (A \cap B^c) \cup (B \cap A) \\ &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A). \end{aligned}$$

Montrons l'égalité $A\Delta B = B\Delta A$. On a

$$\begin{aligned} A\Delta B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\ &= (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = B\Delta A. \end{aligned}$$

Exercice 9

Montrons l'égalité

$$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C).$$

On compute

$$\begin{aligned}
A \cap (B \Delta C) &= A \cap \Big((B \setminus C) \cup (C \setminus B) \Big) \\
&= A \cap \Big((B \cap C^c) \cup (C \cap B^c) \Big) \\
&= (A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap C \cap B^c) = (A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C).
\end{aligned}$$

En même temps

$$\begin{aligned}
(A \cap B) \Delta (A \cap C) &= ((A \cap B) \setminus (A \cap C)) \cup ((A \cap C) \setminus (A \cap B)) \\
&= ((A \cap B) \cap (A \cap C)^c) \cup ((A \cap C) \cap (A \cap B)^c) \\
&= ((A \cap B) \cap (A^c \cup C^c)) \cup ((A \cap C) \cap (A^c \cup B^c)) \\
&= (A \cap B \cap A^c) \cup (A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap C \cap A^c) \cup (A \cap C \cap B^c) \\
&= \emptyset \cup (A \cap B \cap C^c) \cup \emptyset \cup (A \cap B^c \cap C) \\
&= (A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C).
\end{aligned}$$

D'où on conclut

$$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C).$$

Exercice 9

Que valent

$$A\Delta\emptyset \quad \text{et} \quad A\Delta A \quad \text{et} \quad A\Delta B \;\text{ quand }\; A \subset B?$$

Solution :

- On a
$$A\Delta\emptyset = (A \cup \emptyset) \setminus (A \cap \emptyset) = A \setminus \emptyset = A.$$

- On a
$$A\Delta A = (A \cup A) \setminus (A \cap A) = A \setminus A = \emptyset.$$

- Si $A \subset B$, alors
$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = B \setminus A.$$

À faire chez soi - Exercice 10

Soient A, B, C trois ensembles. Montrer que

1. $\left\{ \begin{array}{l} A \cup B \subset A \cup C \\ A \cap B \subset A \cap C \end{array} \right. \implies B \subset C.$
2. On suppose que $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$. Que peut-on dire de B et C ?

À faire chez soi - Exercice 10

Montrer que

$$\left\{\begin{array}{l} A \cup B \subset A \cup C \\ A \cap B \subset A \cap C \end{array}\right. \implies B \subset C.$$

Preuve : Montrons que $B \subset C$. Soit $x \in B$. Alors

$$x \in B \implies x \in A \cup B \implies x \in A \cup C \implies x \in A \text{ ou } x \in C.$$

On a donc deux posibilités à étudier :

- si $x \in C$. Rien d'autre à prouver.
- si $x \in A$. Alors

$$x \in A \implies x \in A \cap B \implies x \in A \cap C \implies x \in C.$$

Ainsi $B \subset C$.

À faire chez soi - Exercice 10

On suppose que $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$. Que peut-on dire de B et C ?

Solution : Montrons que

$$B = C.$$

On raisonne par double inclusion.

- $\subset$: Soit $x \in B$, alors

  $$x \in A \cup B$$

  et donc $x \in A$ ou $x \in B$.

  - Si $x \in A$, alors

    $$x \in A \cap B = A \cap C \subset C$$

    et $x \in C$.
  - Si $x \notin A$, comme $x \in A \cup B = A \cup C$, on a nécessairement $x \in C$.

  Donc $B \subset C$.
- $\supset$: En échangeant le role de B et C dans la preuve précédente, on peut conclure $C \subset B$, et donc $B = C$.

À faire chez soi - Exercice 11

Soit A, B, C trois parties d'un ensemble E.

1. Montrer que
$$A \cap B = A \cup B \quad \Longleftrightarrow \quad A = B.$$
2. Montrer que
$$A \cap B = A \cap C \quad \Longleftrightarrow \quad A \cap B^c = A \cap C^c.$$
3. Montrer que
$$(A \cup B) \setminus (A \cup C) \subset A \cup (B \setminus C).$$
Donner un contre-exemple pour l'inclusion contraire.

À faire chez soi - Exercice 11

Montrons

$$A \cap B = A \cup B \iff A = B.$$

Solution : On raisonne par double implication.

- $\Longrightarrow$: Supposons $A \cap B = A \cup B$ et montrons l'égalié

  $$A = B.$$

  On raisonne par double inclusion :

  - Montrons que $A \subset B$. Soit $x \in A$, alors

    $$x \in A \implies x \in A \cup B = \in A \cap B \implies x \in B.$$

    Donc $A \subset B$.
  - Montrons que $B \subset A$. Soit $x \in B$, alors

    $$x \in B \implies x \in A \cup B = \in A \cap B \implies x \in A.$$

    Donc $B \subset A$.
- $\Longleftarrow$: Supposons $A = B$ et montrons l'égalité

  $$A \cap B = A \cup B.$$

  On a

  $$A \cap B = A \cap A = A = A \cup A = A \cup B.$$

À faire chez soi - Exercice 11

Montrons

$$A \cap B = A \cap C \quad \Longleftrightarrow \quad A \cap B^c = A \cap C^c.$$

Solution : On raisonne par double implication.

- $\Longrightarrow$: Supposons $A \cap B = A \cap C$ et montrons l'égalité

  $$A \cap B^c = A \cap C^c.$$

  On raisonne par double inclusion :

  - Montrons que $A \cap B^c \subset A \cap C^c$. Soit $x \in A \cap B^c$. Comme $x \in A$, il suffit de montrer que $x \in C^c$. On raissone par le absurde. Supposons donc $x \in C$, alors $x \in A \cap C = A \cap B$ donc $x \in B$, ce qui est absurde. Par conséquent $x \in C^c$, d'où on conclut l'inclusion $A \cap B^c \subset A \cap C^c$.
  - En échangeant le role de C et de B dans la preuve précédente on obtient $A \cap C^c \subset A \cap B^c$.

- $\Longleftarrow$: Supposons $A \cap B^c = A \cap C^c$ et montrons l'égalié

  $$A \cap B = A \cap C.$$

  D'aprés la implication reciproque, on a

  $$A \cap B^c = A \cap C^c \quad \Longrightarrow \quad A \cap (B^c)^c = A \cap (C^c)^c \quad \Longleftrightarrow \quad A \cap B = A \cap C.$$

À faire chez soi - Exercice 11

Montrer que

$$(A \cup B) \setminus (A \cup C) \subset A \cup (B \setminus C).$$

Donner un contre-exemple pour l'inclusion contraire.

Solution : Soit $x \in (A \cup B) \setminus (A \cup C)$. Alors

$$x \in A \cup B \quad \text{et} \quad x \notin A \cup C.$$

En particulier $x \notin A$, d'où $x \in B$. Mais comme $x \notin C$, on déduit

$$x \in B \setminus C.$$

Comme ce dernier ensemble est une sous-ensemble de $A \cup (B \setminus C)$, on conclut $x \in A \cup (B \setminus C)$ et donc

$$(A \cup B) \setminus (A \cup C) \subset A \cup (B \setminus C).$$

Finalement, en prenant $A = B = C$ non vide, nous avons

$$(A \cup B) \setminus (A \cup C) = A \setminus A = \emptyset \quad \text{et} \quad A \cup (B \setminus C) = A \cup \emptyset = A.$$

Donc $A \cup (B \setminus C) = A \not\subset \emptyset = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$.

À faire chez soi - Exercice 12

Simplifier les expressions suivantes où A, B et C sont des parties d'un ensemble E :

- $A \cap (A^c \cup B)$
- $A \cup (A^c \cap B)$
- $A \cap (A^c \cup B) \cap (A^c \cup B^c \cup C)$
- $A \cup (A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$

Solution : On a

$$A \cap (A^c \cup B) = (A \cap A^c) \cup (A \cap B) = \emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B$$

On a

$$A \cup (A^c \cap B) = (A \cup A^c) \cap (A \cup B) = E \cap (A \cup B) = A \cup B.$$

On a

$$\begin{aligned} A \cap (A^c \cup B) \cap (A^c \cup B^c \cup C) &= \big((A \cap A^c) \cup (A \cap B)\big) \cap (A^c \cup B^c \cup C) \\ &= (A \cap B) \cap (A^c \cup B^c \cup C) \\ &= (A \cap B \cap A^c) \cup (A \cap B \cap B^c) \cup (A \cap B \cap C) \\ &= (A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

À faire chez soi - Exercice 12

On a

$$
\begin{aligned}
A \cup (A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c \cap C) &= \big((A \cup A^c) \cap (A \cup B)\big) \cup (A^c \cap B^c \cap C) \\
&= (E \cap (A \cup B)) \cup (A^c \cap B^c \cap C) \\
&= (A \cup B) \cup (A^c \cap B^c \cap C) \\
&= (A \cup B \cup A^c) \cap (A \cup B \cup B^c) \cap (A \cup B \cup C) \\
&= E \cap E \cap (A \cup B \cup C) \\
&= (A \cup B \cup C).
\end{aligned}
$$

Pour aller plus loin - Exercice 13

Soit $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_i)_{i\in I}$ deux familles de parties d'un ensemble E. On suppose que pour tout indice i de I, on a

$$E = A_i \cup B_i.$$

Montrer que $E = \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \bigcup \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)$.

Solution : Notons

$$F = \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \bigcup \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right).$$

Nous devons montrer l'égalité

$$E = F.$$

On raisonne par double inclusion.

- $F \subset E$: Rien à démontrer, par définition $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_i)_{i\in I}$ sont deux familles de parties de E.
- $E \subset F$: Soit $x \in E = \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) \cup \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)^c$. Si $x \in \cap_{i\in I} B_i$ alors $x \in F$. Si $x \notin \cap_{i\in I} B_i$, alors il existe $i \in I$ tel que $x \notin B_i$, or $E = B_i \cup A_i$. Ainsi $x \in A_i$ et on conclut que $x \in \bigcup_i A_i$. Donc

  $$x \in F.$$

  Par conséquent, $E \subset F$ et $E = F$.

Pour aller plus loin - Exercice 14

Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer que

$$(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$$

Solution : On commence par noter que

$$\begin{aligned}
(A\Delta B)\Delta C &= [(A\Delta B)\cup C]\cap[(A\Delta B)^c\cup C^c]\\
&= \Big[[(A\cup B)\cap(A^c\cup B^c)]\cup C\Big]\cap\Big[[(A^c\cup B)\cap(A\cup B^c)]\cup C^c\Big]\\
&= (A\cup B\cup C)\cap(A^c\cup B^c\cup C)\cap(A^c\cup B\cup C^c)\cap(A\cup B^c\cup C^c)
\end{aligned}$$

D'où on conclut

$$\begin{aligned}
(A\Delta B)\Delta C &= (A\cup B\cup C)\cap(A^c\cup B^c\cup C)\cap(A^c\cup B\cup C^c)\cap(A\cup B^c\cup C^c)\\
&= (B\cup C\cup A)\cap(B^c\cup C^c\cup A)\cap(B\cup C^c\cup A^c)\cap(B^c\cup C\cup A^c)\\
&= \Big[[(B\cup C)\cap(B^c\cup C^c)]\cup A\Big]\cap\Big[[(B^c\cup C)\cap(B\cup C^c)]\cup A^c\Big]\\
&= [(B\Delta C)\cup A]\cap[(B\Delta C)^c\cup A^c]\\
&= (B\Delta C)\Delta A\\
&= A\Delta(B\Delta C).
\end{aligned}$$