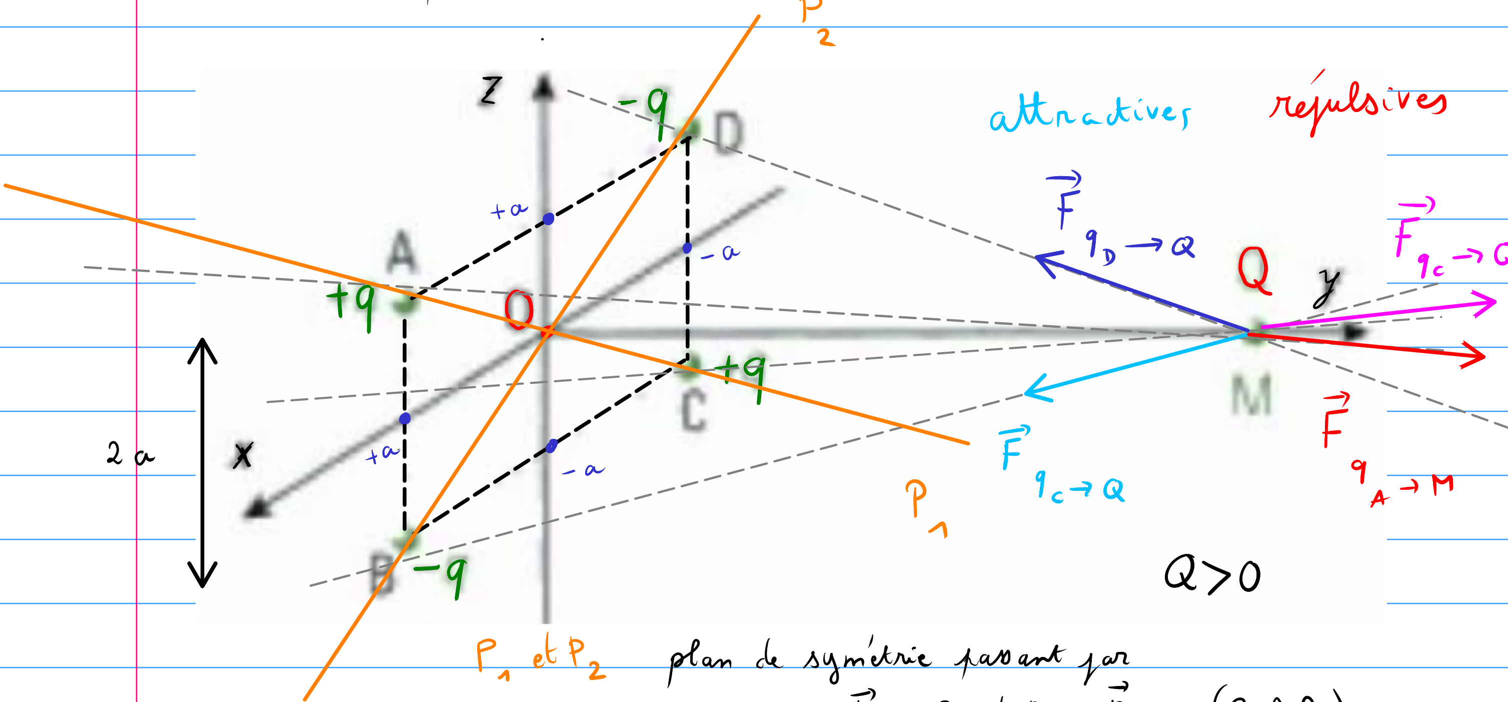
2 | Champ électrostatique

Exercice 1 – Distribution discrète de charges ponctuelles

Quatre charges électriques ponctuelles, de valeur absolue q sont placées aux sommets d'un carré $ABCD$. Ce carré a pour côté $2a$, centre O et appartient au plan Oxz, comme le montre la figure ci-dessous.

$|q_A| = |q_B| = |q_C| = |q_D| = q > 0$, coordonnées cartésiennes.



P_1 et P_2 plan de symétrie passant par O et M $\Rightarrow \vec{E} \in P_1$ et P_2 ; $\vec{E} \in (P_1 \cap P_2)$

Déterminer l'expression de la force subie par la charge électrique Q placée en un point M quelconque de l'axe Oy.

- Force $\vec{F}_{\to Q}$ en M dûe aux 4 autres charges :

Théorème de superposition :

en M, $\boxed{\vec{F}_{\to Q} = \vec{F}_{q_A \to Q} + \vec{F}_{q_B \to Q} + \vec{F}_{q_C \to Q} + \vec{F}_{q_D \to Q}}$ (I)

$q_A = +q$
$q_B = -q$
$q_C = +q$
$q_D = -q$

pour la charge en A : $\boxed{\underset{(\text{en } A)\ (\text{en } M)}{\vec{F}_{q_A \to Q}} = \underbrace{\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)}_{k} \frac{q_A\, Q}{r_{AM}^2} \vec{u}_{A \to M}}$ loi de Coulomb

$r_{AM} = \|\vec{AM}\|$ et $\vec{u}_{A\to M} = \dfrac{\vec{AM}}{\|\vec{AM}\|}$

$$\hookrightarrow \vec{F}_{q_A \to Q} = k \frac{q_A\, Q}{\|AM\|^3} \overrightarrow{AM}$$, de même pour q_B, q_C, et q_D.

* <u>coordonnées des points</u> : A, B, C, D dans le plan (xOz)

symétrique A par rapport à l'axe Ox

$$A = \begin{pmatrix} +a \\ 0 \\ +a \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} +a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}$$

symétrique de A par rapport à O

symétrique de B par rapport à O

$$C = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ +a \end{pmatrix} \qquad \text{et } M = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} -a \\ y \\ -a \end{pmatrix} ; \quad \overrightarrow{BM} = \begin{pmatrix} -a \\ y \\ +a \end{pmatrix} ; \quad \overrightarrow{CM} = \begin{pmatrix} +a \\ y \\ +a \end{pmatrix} ; \quad \overrightarrow{DM} = \begin{pmatrix} +a \\ y \\ -a \end{pmatrix}$$

car $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} x_M - x_A \\ y_M - y_A \\ z_M - z_A \end{pmatrix}$

Pyramide à base carrée : $r_{AM}^2 = \|\overrightarrow{AM}\|^2 = (-a)^2 + y^2 + (-a)^2 = 2a^2 + y^2$

$$= r_{BM}^2 = r_{CM}^2 = r_{DM}^2 = r^2$$

$$\Rightarrow \quad r = \left(y^2 + 2a^2\right)^{1/2}$$

facteur commun aux 4 forces.

$$\ast \quad \vec{F}_{q_A \to Q} = k \frac{q_A\, Q}{r^3} \overrightarrow{AM}$$

cf (I)

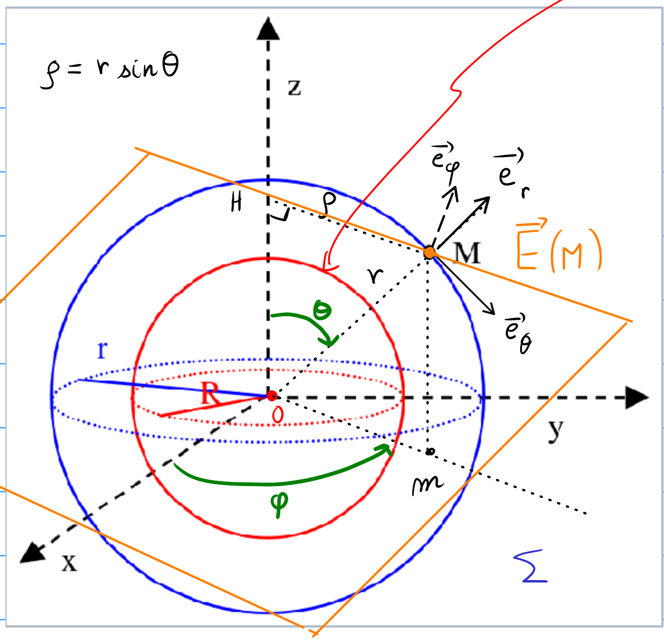
$$\vec{F}_{\to Q} = k \frac{Q}{r^3} \left[\overset{+q}{q_A} \overrightarrow{AM} + \overset{-q}{q_B} \overrightarrow{BM} + \overset{+q}{q_C} \overrightarrow{CM} + \overset{-q}{q_D} \overrightarrow{DM} \right]$$

$$= k \frac{Qq}{r^3} \Bigg[\underbrace{+ \begin{pmatrix} -a \\ y \\ -a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -a \\ y \\ +a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +a \\ y \\ +a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} +a \\ y \\ -a \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \Bigg] = \vec{0}$$

Calculs de flux de champ électrique

Exercice 2 – Symétrie sphérique
Soit une sphère, de rayon R, chargée uniformément.
En commençant par une étude de symétrie et d'invariance, calculer le flux de $\vec{E}$ à travers la surface Σ d'une sphère de rayon r. Les deux sphères ont le même centre.

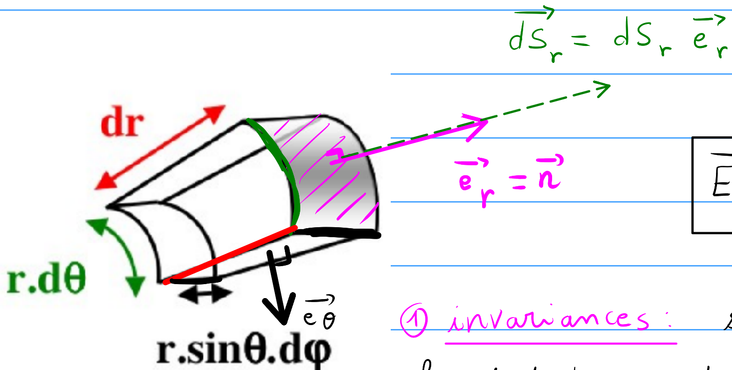
sphère chargée avec $\rho = \rho_0 = cst$
($ou\ \sigma = \sigma_0 = cst$)



⓪ système de coordonnées sphériques :
$\{O, (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)\}$

$\vec{OM} = r\vec{e}_r$, $d\vec{OM}$

$d\vec{\ell} =$	dr	$d\vec{S} =$ • $r^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$
	$r\,d\theta$	• $r\,dr\,\sin\theta\, d\varphi$
	$r\sin\theta\, d\varphi$	• $r\,dr\,d\theta$



donc en M,

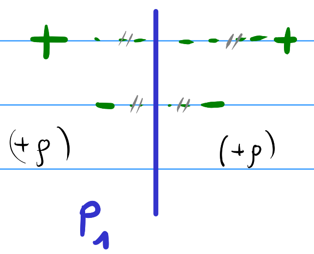
$$\boxed{\vec{E}(M) = E(r, \cancel{\theta}, \cancel{\varphi})\ \vec{u}}$$

① invariances : sphère uniformément chargée donc la distribution de charge reste la même si on varie en θ et φ : $\vec{E}(\vec{r})$

② Symétries : ⟶ direction de $\vec{E}$

tout plan P_1 passant par M et O (centre de la sphère) est un plan de symétrie ($+\rho \to +\rho$ la même)
↳ ∞ de plans de symétrie or $\boxed{E \in P_1}$

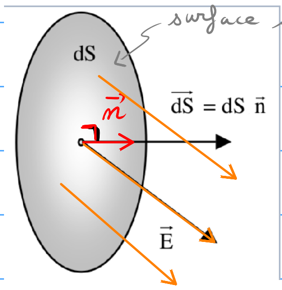
or la direction commune est $\vec{e}_r$: $\vec{u} = \vec{e}_r$



donc $\boxed{\vec{E}(M) = E(r)\,\vec{e}_r}$

③ « Théorème de Gauss » : calcul du flux de $\vec{E}$ à travers la surface Σ

$\ast$ flux élémentaire : $d\phi$



produit scalaire

$$\boxed{d\phi(\vec{E}) = \vec{E} \cdot \vec{dS}}$$

flux total : $\phi = \iint_{\Sigma} d\phi$

Σ : sphère de centre O et de rayon r

$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V = -\dfrac{dV}{dx}\vec{e}_x$ (V, m^{-1})

E en $V.m^{-1}$

$[E] = \dfrac{1}{[\varepsilon_0]}\dfrac{[Q]}{L^2}$

or ici, $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r \Rightarrow d\phi(\vec{E}) = E(r)\underbrace{(\vec{e}_r \cdot \vec{dS})}_{dS_r} = E(r)\, dS_r$

r constant

$$\phi(\vec{E}) = \iint_{\Sigma} E(r)\, r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$\hookrightarrow \phi(\vec{E}) = E(r)\, r^2 \displaystyle\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$

$$\phi(\vec{E}) = r^2 E(r) \underbrace{\int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta\, d\theta}_{=2} \underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} = 4\pi r^2 E(r)$$

$V.m$ m^2 $V.m^{-1}$

rq : $[\phi] = [E] \times L^2$

$[\phi] = \dfrac{[Q]}{\varepsilon_0}$

Exercice 3 Symétrie cylindrique

Soit un cylindre, de rayon R et de hauteur supposée infinie, chargé uniformément.

En commençant par une étude de symétrie et d'invariance, calculer le flux de $\vec{E}$ à travers la surface Σ d'un cylindre de rayon r et de hauteur h. Les deux cylindres ont le même axe.

⓪ choix du système de coordonnées : cylindriques

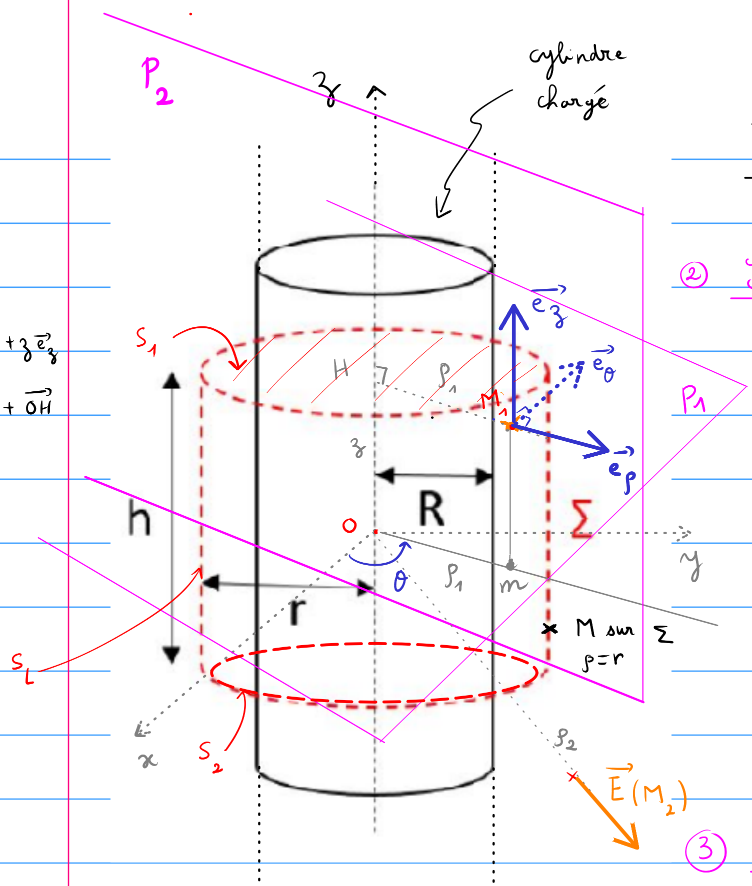
$\{O, (\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)\} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = E(\rho, \cancel{\theta}, \cancel{z})\,\vec{u}}$

① invariance : • cylindre ∞ selon (Oz) $\Rightarrow$ invariance de la distribution de charges selon z $\hookrightarrow E(\rho, \theta, z)$ indépendant de z

• distribution uniforme $\Rightarrow$ invariance de la distribution de charges par rotation autour de l'axe (Oz)
$\hookrightarrow E(\rho, \theta, z)$ indépendant de θ

$\vec{OM} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z$

$= \vec{HM} + \vec{OH}$



$$\underline{\vec{E} = E(\rho)\, \vec{u}}$$

② Symétries : (pour la distribution de charges) $\vec{u} = ?$

- P_1 passant par M, donné par

$P_1 = (M, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$ plan de symétrie

- P_2 passant par M, donné par

$P_2 = (M, \vec{e}_\rho, \vec{e}_z)$ " " "

$$\left.\begin{array}{l} \vec{E} \in \vec{P_1} \\ \vec{E} \in \vec{P_2} \end{array}\right\} \vec{E} \in (P_1 \cap P_2) \Rightarrow \boxed{\vec{E} = E(\rho)\, \vec{e}_\rho}$$

③ Théorème de Gauss : calcul de $\Phi(\vec{E})$ à travers la surface fermée Σ, surface de Gauss :

Σ = cylindre de hauteur h, de rayon r, de même axe que le cylindre chargé.

cylindrique : $\vec{OM} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z$

$$\vec{dl} = \left| \begin{array}{l} d\rho = dl_\rho \\ \rho\, d\theta = dl_\theta \\ dz = dl_z \end{array} \right. \Rightarrow \vec{dS} = \left| \begin{array}{lll} \bullet\ \rho\, d\theta\, dz = dl_\theta\, dl_z & & (\vec{e}_\rho) \\ \bullet\ d\rho\, dz & & (\vec{e}_\theta) \\ \bullet\ \rho\, d\rho\, d\theta = dl_\rho\, dl_\theta & & (\vec{e}_z) \end{array} \right.$$

$$\Phi(\vec{E}) \triangleq \oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \oiint E(\rho)\, \underbrace{\vec{e}_\rho \cdot \vec{dS}}_{dS_\rho = \rho\, d\theta\, dz}$$

surface fermée

Σ : surface de Gauss

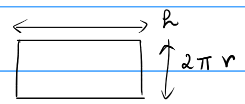
$\rho = r$ sur Σ

$$\Phi(\vec{E}) = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho E(\rho)\, d\theta\, dz = r E(r) \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \underbrace{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz}_{[z]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = h}$$

$\rho = r$ constant

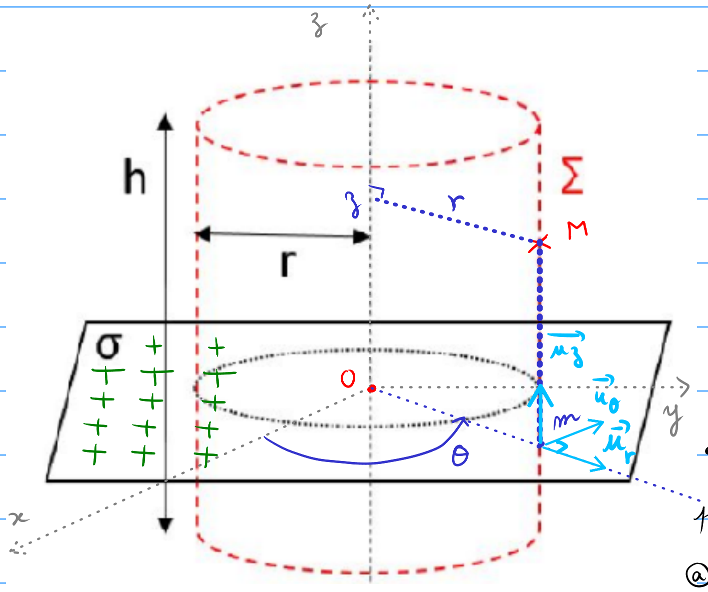
$$\underline{\Phi(\vec{E}) = \underbrace{2\pi r h}_{S_L} E(r)}$$

S_L : surface latérale de Σ



Exercice 4 – Symétrie plane

Soit un plan infini chargé uniformément de densité $\sigma \hat{=} \frac{dq}{ds} = \sigma_0$. En commençant par une étude de symétrie et d'invariance, calculer le flux de $\vec{E}$ à travers la surface Σ d'un cylindre de rayon r et de hauteur h. L'axe du cylindre est perpendiculaire au plan chargé. (il serait intéressant de prendre $h/2$ de part et d'autre du plan).



① système de coordonnées

↳ cylindriques $\{O, (\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)\}$

$\vec{E} = E(\cancel{r},\cancel{\theta},z)\ \vec{u}$

② Invariances :

• plan uniformément chargé $\sigma(P) = \sigma_0 = cst$ + plan ∞ donc distribution de charges invariante :

ⓐ par rotation autour de l'axe (Oz)

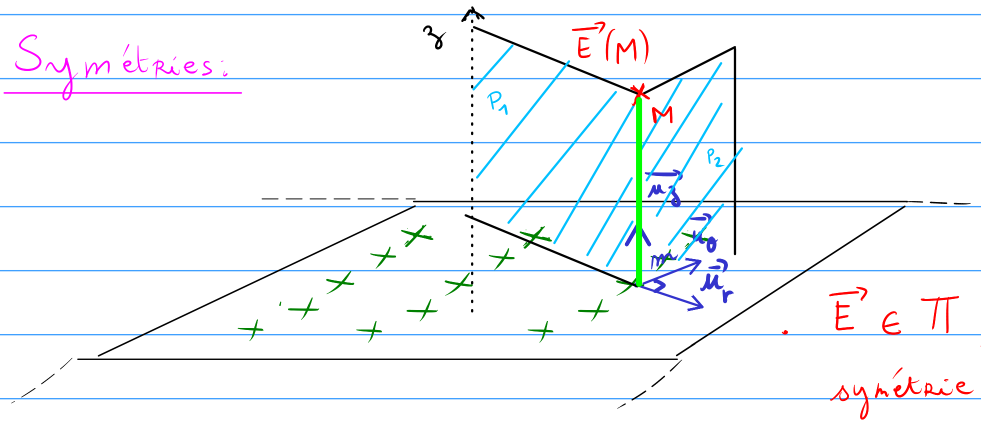
ⓑ par translation selon $\vec{u}_r$

ⓐ $E(r,\theta,z)$ indépendante de θ

ⓑ $E(r,\theta,z)$ —————— r

$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = E(z)\ \vec{u}}$

③ Symétries :



• $\vec{E} \in \Pi$, Π plan de symétrie

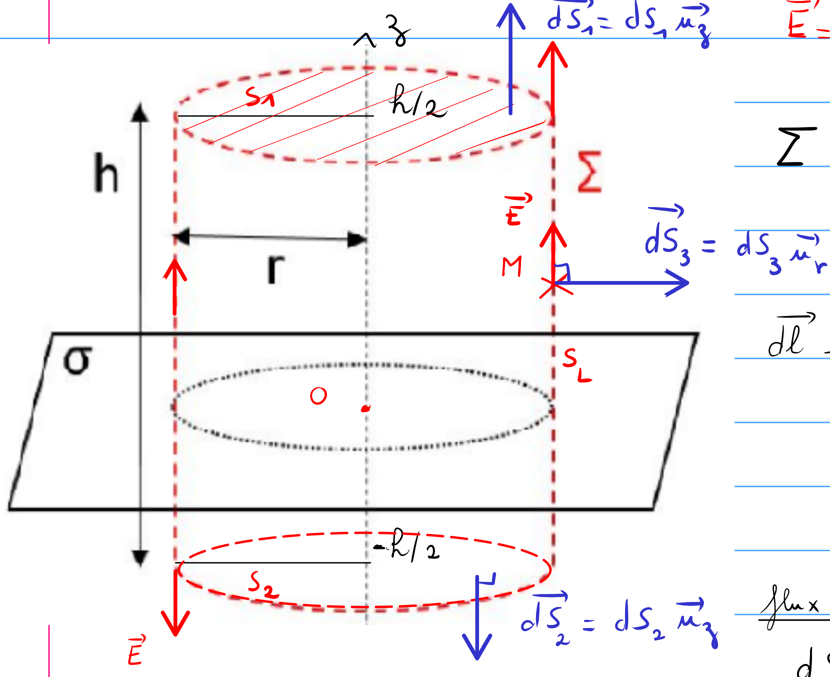
• plan $P_1 = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ plan de symétrie pour la distribution de charges

• plan $P_2 = (M, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ " " " " " " " "

$\vec{E} \in (P_1 \cap P_2)$ donc $\vec{E}$ est selon la direction commune $\vec{u}_z$

$$\boxed{\vec{E} = E(z)\ \vec{u}_z}$$

④ Flux de $\vec{E}$: Σ = surface de Gauss



$\vec{E} = E(z)\,\vec{u_z}$

$\Sigma = S_L + S_1 + S_2$

$$\vec{dl} = \begin{array}{|l} dr \\ r\,d\theta \\ dz \end{array} \Rightarrow \vec{dS} = \begin{array}{|ll} \bullet\ r\,d\theta\,dz & (\vec{u_r}) \\ \bullet\ dr\,dz & (\vec{u_\theta}) \\ \bullet\ r\,dr\,d\theta & (\vec{u_z}) \end{array}$$

flux élementaire :

$$d\Phi(\vec{E}) = \vec{E}\cdot\vec{dS} = E(z)\,\underbrace{\vec{u_z}\cdot\vec{dS}}_{dS_z}$$

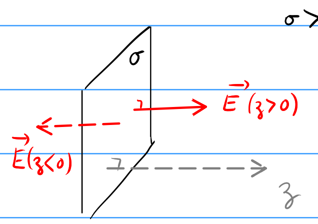
flux total : surface fermée

$$\Phi(\vec{E}) = \oiint_{\Sigma} d\Phi(\vec{E}) = \Phi_1 + \Phi_2 + \underbrace{\Phi_L}_{=0}$$

$$= \iint_{S_1} E(z)\,dS_z + \iint_{S_2} E(z)\,dS_z + 0$$

car $\Phi_L(\vec{E}) = 0$ car $\vec{E}$ selon $\vec{u_z}$: $\vec{u_r}\cdot\vec{u_z} = \vec{0}$ (cf schéma)

$$\Rightarrow \Phi(\vec{E}) = \iint_{S_1\ (z>0)} E(z)\; r\,dr\,d\theta + \iint_{S_2\ (z<0)} E(z)\; r\,dr\,d\theta$$



Le plan chargé est un plan de symétrie pour $\vec{E}$:

$$E(z<0) = -E(z>0)$$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = 2\,\Phi_1 = 2\int_{r=0}^{r}\int_{\theta=0}^{2\pi} E(z>0)\; r\,dr\,d\theta$$

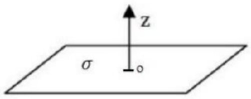
à z fixé, E constant

$$\Phi(\vec{E}) = 2\,E(z>0)\,\underbrace{\left(\int_{r=0}^{r} r\,dr\right)}_{\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^r = \frac{r^2}{2}}\;\underbrace{\int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta}_{[\theta]_0^{2\pi} = 2\pi} = 2\,\underbrace{\pi r^2}_{= S_1 = S_2}\,E(z>0)$$

Calcul de champ électrique avec le théorème de Gauss

Exercice 8 – Plan infini uniformément chargé

Soit un plan infini uniformément chargé en surface, de densité surfacique de charge σ séparant l'espace en deux demi-espaces $z > 0$ et $z < 0$.



$\sigma = \sigma_0$ constant

Appliquer le théorème de Gauss pour calculer le champ électrostatique $\vec{E}$ engendré par cette distribution en tout point M de l'espace.
Remarquer la discontinuité du champ $\vec{E}$ en $z = z_{\text{plan}} (= 0 \text{ ici})$.

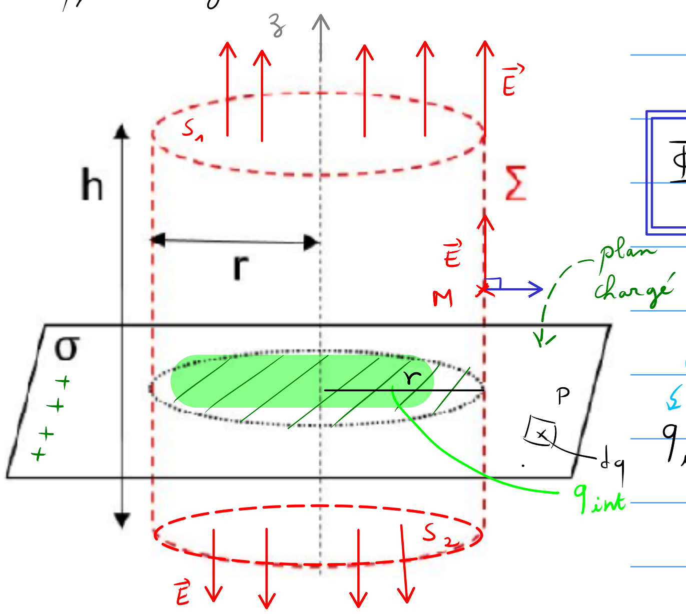
suite Exercice 4 : $\vec{E} = E(z)\,\vec{u_z}$

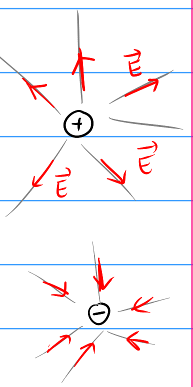
or $\Phi(\vec{E}) = 2\,E(z>0)\,\pi r^2$ et $E(z>0) = -E(z<0)$

(4) Théorème de Gauss :

Théorème : Le flux Φ du champ $\vec{E}$ à travers une surface fermée Σ est proportionnel à la charge q_{int} contenue dans le volume V délimité par la surface Σ

Σ appelée surface de Gauss , Σ choisie "astucieusement" (cf symétrie)





$$\boxed{\Phi(\vec{E}) = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}}$$

or $\sigma \hat{=} \dfrac{dq}{dS}$ constante

$$\underset{C}{q_{int}} \hat{=} \underset{\substack{\text{volume V} \\ (\text{contenue par } \Sigma)}}{\iiint} dq = \underset{\text{surface verte}}{\iint} \underset{C.m^{-2}}{\sigma}\, \underset{m^2}{dS}$$

σ cst

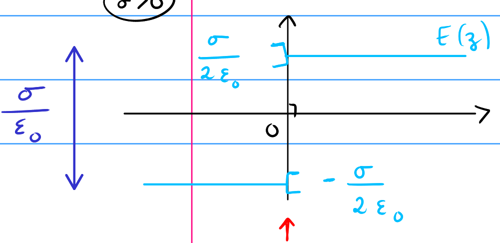
* $q_{int} = \sigma\, S_{\text{Verte}} = \sigma\,\pi r^2$ donc

Théorème de Gauss

$$\Phi(\vec{E}) = 2\,E(z>0)\,\cancel{\pi r^2} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\cancel{\pi r^2}$$

$$\Rightarrow E(z>0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad \text{et} \quad E(z<0) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$\sigma > 0$



discontinuité à la traversée de la surface chargée :

$$E(z=0^+) - E(z=0^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

ρ constante

Exercice 5 – Sphère uniformément chargée en volume

Une boule de centre O et de rayon R porte une densité volumique de charge uniforme ρ.

1/ Quelle est l'expression de la charge totale, notée Q, contenue dans la sphère ?

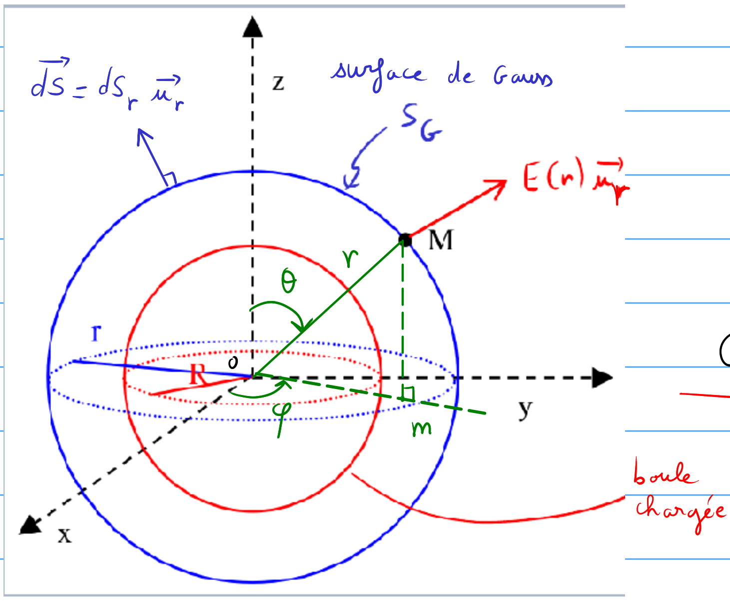
2/ Calculer le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ en considérant le point M : ④ $\Phi(\vec{E})$ Théo. de Gauss

a) à l'interieur de la sphère : $r < R$ $\Big\}$ q_{int}

b) à l'extérieur de la sphère : $r > R$

3/ Le champ est-il continu à la traversée de la sphère ? À commenter.

4/ Tracer l'allure de $E(r)$.



1/ Charge totale Q :

$$Q = \iiint_{V_{boule}} dq \quad \text{et} \quad \rho = \frac{dq}{dV} = cst$$

constant (uniforme)

$$Q = \iiint_{V_{boule}} \rho \, dV = \rho\, V_T = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

2/ Calculer le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ en considérant le point M :

a) à l'interieur de la sphère : $r < R$

b) à l'extérieur de la sphère : $r > R$

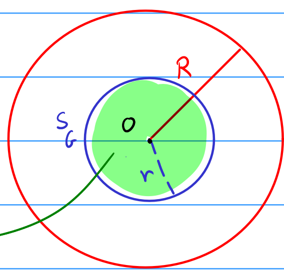
Exercice 2 : $\vec{E} = E(r)\, \vec{u}_r$ et $\Phi(\vec{E}) = 4\pi r^2 E(r)$

Théorème de Gauss : S_G surface de Gauss (bleue) de la sphère de centre O et de rayon r

$$\boxed{\Phi(\vec{E}) = \oiint_{S_G} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}}$$

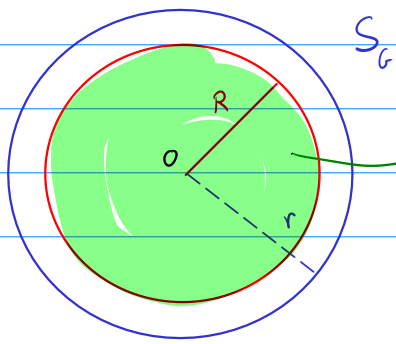
a) $r < R$: sphère chargée

Sphère de Gauss



q_{int}

b) $r > R$:



$q_{int} = Q$ (question 1/)

$dq = \rho \, dV$

a) $q_{int} = \underbrace{\iiint}_{\text{volume défini par } S_G} dq = \rho \underbrace{\iiint}_{\text{volume défini par } S_G} dV = \rho \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$

b) $q_{int} = Q = \rho\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$ donc

$[E] = \frac{[q]}{[\varepsilon_0] L^2}$

$[\rho r] = \frac{[q]}{L^3} L$

a) $r < R$: $\cancel{4}\cancel{\pi} r^{\cancel{2}} E(r) = \left(\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right)\left(\frac{\cancel{4}}{3}\cancel{\pi} r^{\cancel{3}\,1}\right)$

$\Rightarrow \boxed{E(r<R) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r}$

b) $r > R$: $\cancel{4}\cancel{\pi} r^2 E(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{\cancel{4}}{3}\cancel{\pi} R^3$

$\Rightarrow \boxed{E(r>R) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2}}$

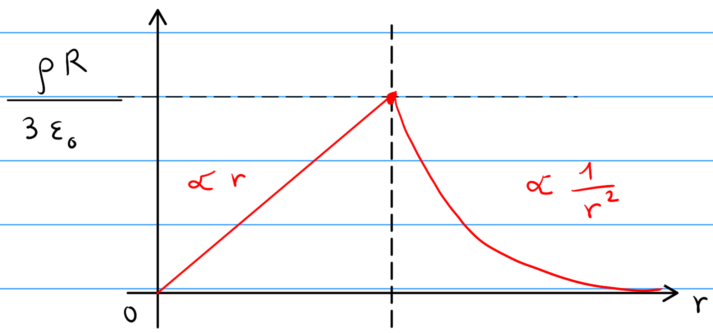
3/ Le champ est-il continu à la traversée de la sphère (chargée)? À commenter. OUI

pour $r = R$: $E(r=R^-) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} R = E(r=R^+) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{R^2}$

le champ $\vec{E}$ est continu et défini sur tout l'espace car la distribution de charges est volumique.

4/ Tracer l'allure de $E(r)$.

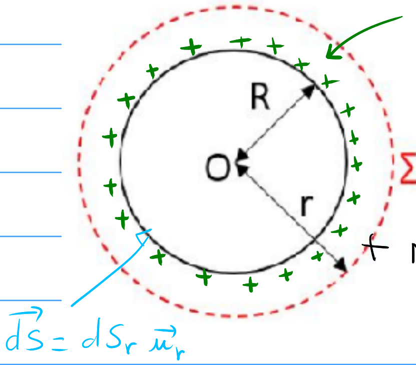
$$\begin{cases} r \leq R : & E(r) = \left(\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\right) r \\ r \geq R : & E(r) = \left(\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\right)\frac{R^3}{r^2} \end{cases}$$



Exercice 6 – Sphère uniformément chargée en surface

Une sphère de centre O et de rayon R porte une densité surfacique de charge uniforme σ. cst

1/ Quelle est l'expression de la charge totale, notée Q, sur la sphère ?



$\vec{dS} = dS_r\,\vec{u}_r$

$$Q = \underbrace{\iint}_{\text{surface chargée}} dq = \underbrace{\iint}_{\text{surface chargée}} \sigma\, dS \qquad \text{(constant)}$$

$$Q = \sigma\, S_{\text{sphère}} = \sigma\, 4\pi R^2$$

$$\cdot\ dS_r = dl_\theta\, dl_\varphi = (r\,d\theta)(r\sin\theta\, d\varphi) = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \quad , \quad \vec{dl} = \begin{vmatrix} dr \\ r\,d\theta \\ r\sin\theta\, d\varphi \end{vmatrix}$$

$$\theta \in [0,\pi]\ ,\ \varphi \in [0, 2\pi]$$

2/ Calculer le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ en considérant le point M :

a) à l'interieur de la sphère : $r < R$

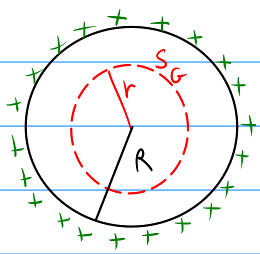
b) à l'extérieur de la sphère : $r > R$

$$\boxed{\Phi(\vec{E}) = 4\pi r^2 E(r) = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}}$$

Théorème de Gauss , $Q = \sigma 4\pi R^2$

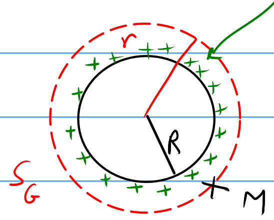
a) $r < R$:

sphère de Gauss



$$q_{int} = 0 \Rightarrow E(r<R) = 0$$

b) $r > R$:



$$q_{int} = Q = \sigma 4\pi R^2$$

$$\Phi(\vec{E}) = \cancel{4\pi} r^2 E(r) = \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right) \cancel{4\pi} R^2$$

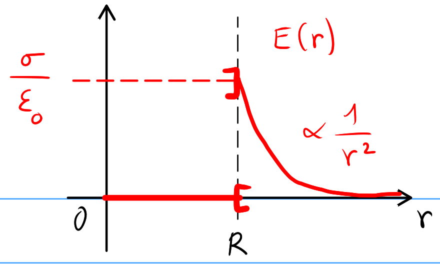
$$E(r) = \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right) \frac{R^2}{r^2}$$

3/ Le champ est-il continu à la traversée de la sphère ? À commenter. NON

$E(r = R^+) = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ et $E(r = R^-) = 0$ donc le champ $\vec{E}$ est discontinu à la traversée de la surface chargée

$$\vec{E}(r=R^+) - \vec{E}(r=R^-) = \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right) \vec{u}_r$$

4/ Tracer l'allure de $E(r)$.

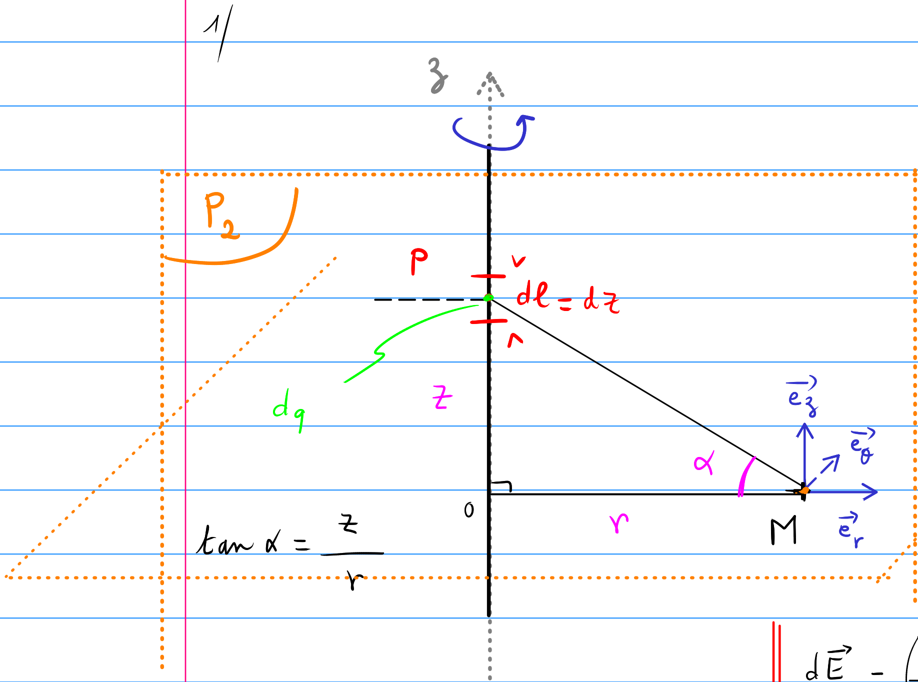


Exercice 7 – Fil infini uniformément chargé

1/ Calculer par intégration le champ électrostatique $\vec{E}$ créé en un point M quelconque de l'espace par une distribution linéique de charges de densité λ uniforme et répartie le long de l'axe des z.

2/ Retrouver ce résultat en calculant $\vec{E}$ en appliquant le théorème de Gauss.

1/



* M point quelconque de l'espace
* dz : longueur élémentaire centrée en P

$dq = \lambda\, dz$, λ constant

P_1

loi de Coulomb :

$$\vec{E}(M) = \int_{P \in \text{fil}} d\vec{E} \quad \text{avec}$$

constant

$$d\vec{E} = \left(\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\right)\left(\frac{\vec{PM}}{PM^3}\right) = \frac{\lambda\, dz\ \vec{PM}}{4\pi\varepsilon_0\ PM^3}$$

$$\vec{PM} = \underbrace{\vec{PO}}_{-\vec{OP}} + \vec{OM} = -z\,\vec{e}_z + r\,\vec{e}_r \quad \text{et} \quad PM^2 = r^2 + z^2 \quad \text{donc}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left\{ \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-z\, dz}{(r^2+z^2)^{3/2}}\,\vec{e}_z}_{=0 \text{ par symétrie}} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r\, dz}{(r^2+z^2)^{3/2}}}_{E_r}\,\vec{e}_r \right\}$$

• Pour des raisons de symétrie, $P_1 = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et $P_2 = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ plans de symétrie : $\vec{E} \in (P_1 \cup P_2)$

$\longrightarrow$ direction commune $\vec{e}_r$ = direction de $\vec{E}$

- invariance par translation selon (Oz) (fil ∞) et rotation autour de (Oz) (dist. uniforme) : $\vec{E} = E(r)\,\vec{e}_r$

$$\vec{E} = E_r\,\vec{e}_r \quad \text{avec} \quad E_r = \int_{-\infty}^{+\infty} dE_r \quad \text{et} \quad dE_r = \underbrace{\left(\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\right)}_{\text{constant}} \frac{r\,dz}{(z^2+r^2)^{3/2}}$$

$$E_r = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r\,dz}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

changement de variable : $\tan\alpha = \dfrac{z}{r}$

$z \in \left]-\infty, +\infty\right[$; $\alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

$$\frac{r\,dz}{\left[r^2\left(1+\left(\frac{z}{r}\right)^2\right)\right]^{3/2}} = \boxed{\frac{dz}{r^2}}\ \frac{1}{(1+\tan^2\alpha)^{3/2}} \qquad (\cos^2\alpha)^{3/2} = \cos^3\alpha$$

r^3

$$\frac{dz}{r^2} = \frac{1}{r}\frac{dz}{r} = \frac{1}{r}\,d(\tan\alpha) = \frac{1}{r}\left(\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}\right) \quad \text{car}$$

$$\frac{d(\tan\alpha)}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) = \left(1+\tan^2\alpha\right) = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\frac{r\,dz}{\left[r^2\left(1+\left(\frac{z}{r}\right)^2\right)\right]^{3/2}} = \frac{1}{r}\cos\alpha\,d\alpha$$

$$E_r = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{r\,dz}{(r^2+z^2)^{3/2}}\right) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\alpha\,d\alpha}_{2 = 1-(-1) = [\sin\alpha]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}}$$

$$\vec{E} = \left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\right)\vec{e}_r$$

2/ Théorème de Gauss :

(0) Définition et continuité : $\vec{E}$ défini et continu partout sauf sur le fil (où il y a les charges)

(1) système de coordonnées : $\{O, (\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)\}$

(2) Invariances : $\vec{E} = E(r, \cancel{\theta}, \cancel{z})\,\vec{u}$

(3) Symétries : cf 1/ $\Rightarrow$ $\vec{E} = E(r)\,\vec{u}_r$ $\Leftarrow$ $\begin{cases} P_1 = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta) \\ P_2 = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z) \end{cases}$

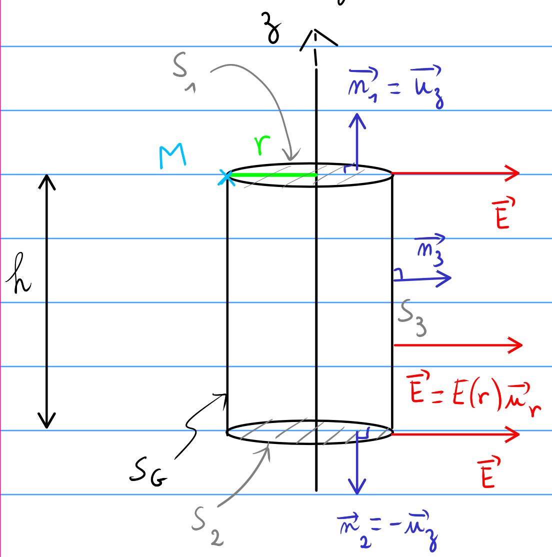
cf 1/

4) Théorème de Gauss :

$$\boxed{\Phi(\vec{E}) = \oiint_{S_G} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}}.$$

a) S_G : surface de Gauss contient une partie de la distribution de charges, de dimensions finies et fermée (respecte les symétries)

↳ S_G : cylindre d'axe (Oz), de hauteur h et de rayon r.



b) $\Phi(\vec{E}) = \oiint_{S_G} E(r)\, \vec{u}_r \cdot \vec{n}\, dS$

$$\Phi(\vec{E}) = \iint_{S_1} E(r) \underbrace{\vec{u}_r \cdot \vec{n}_1}_{=0} dS + \iint_{S_2} E(r) \underbrace{\vec{u}_r \cdot \vec{n}_2}_{=0} dS$$

$$+ \iint_{S_3} E(r) \underbrace{\vec{u}_r \cdot \vec{n}_3}_{=1} dS_r$$