Nombres Réels

Exercice 1. Les nombres suivants sont-ils des rationnels ? des décimaux ?

$$a = 1/3, \quad b = 1/15, \quad c = 1/25, \quad d = 1/125, \quad e = 0.333\ldots, \quad f = \sqrt{2}, \quad g = 0.123456789123\ldots$$

Exercice 2. Trouver sous la forme $\frac{p}{q}$ des rationnels x dont les développements décimaux périodiques sont donnés par :

$$3.14\widehat{14}\ldots; \qquad 3.149\widehat{9}\ldots$$

A faire chez soi

$0.999\ldots$.

Exercice 3. Montrer que $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ est irrationnel.

Pour aller plus loin

Exercice 4.

1. Démontrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors $r + x \notin \mathbb{Q}$ et si $r \neq 0$ alors $r.x \notin \mathbb{Q}$.
2. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
3. En déduire: entre deux nombres rationnels il y a toujours un nombre irrationnel.

Exercice 5. Étant donné un ensemble $A \subset \mathbb{R}$, écrire avec des quantificateurs les propriétés suivantes:

1. 10 est un majorant de A;
2. m est un minorant de A;
3. P n'est pas un majorant de A;
4. A est majoré;
5. A n'est pas minoré;

6. A est borné;

7. A n'est pas borné.

Exercice 6. Soit
$$I = \left\{ x \in \mathbb{R}^* \ : \ -2 < x + \frac{1}{2x} \leq 2 \right\}.$$

1. Montrer que I est la réunion de deux intervalles.

2. Déterminer (s'il existent): les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément de I.

Exercice 7. Les ensembles suivants sont-ils majorés ? Minorés ? Si oui, déterminer leur borne inférieure et leur borne supérieure. Ont-t-ils un plus petit élément? Un plus grand élément?
$$A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x^2 < 2\}$$
$$B = \left\{ 1 + \frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}^* \right\}$$
$$C = \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{p} \ : \ n \in \mathbb{N}^*, \ p \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Exercice 8.

1. Montrer que, $\forall n, m \in \mathbb{N}^*$
$$0 < \frac{mn}{(m+n)^2} \leq \frac{1}{4}.$$

2. En déduire que
$$A = \left\{ \frac{mn}{(m+n)^2}, \ n \in \mathbb{N}^*, \ m \in \mathbb{N}^* \right\}$$
admet une borne supérieure et inférieure que l'on déterminera.

Exercice 9. Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que pour tout x de A et tout y de B on ait
$$x \leq y.$$
Démontrer que $\sup(A)$ et $\inf(B)$ existent et que $\sup(A) \leq \inf(B)$.

Exercice 10.

1. Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. On pose
$$-A = \{-x \ : \ x \in A\}.$$
Montrer que $-A$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$ et que $\sup(-A) = -\inf(A)$.

2. Soient A, B deux parties non vides bornées de $\mathbb{R}$. On pose
$$A + B = \{x + y \ : \ x \in A, \ y \in B\}.$$
Montrer que $A + B$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$ et que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$, $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$.

Exercice 11. Soit A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. Démontrer les implications suivantes:

1. $A \subset B \Rightarrow \sup(A) \leq \sup(B)$,
2. $A \subset B \Rightarrow \inf(B) \leq \inf(A)$,
3. $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$,
4. $\inf(A \cap B) \geq \max(\inf(A), \inf(B))$.

A faire chez soi

Exercice 12. On considère l'ensemble des nombres de la forme $\frac{1}{n}$, où n décrit l'ensemble des entiers strictement positifs. Cet ensemble est-il majoré ? Minoré ? A-t-il un plus petit élément ? Un plus grand élément ? Justifier vos réponses.

Exercice 13. Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. On note

$$B = \{|x - y|,\ (x, y) \in A^2\}.$$

1. Justifier que B est majoré.
2. Prouver que
$$\sup(B) \ = \ \sup(A) - \inf(A).$$

Exercice 14. Soient A et B deux parties non vides bornées de $\mathbb{R}$. On pose

$$A \cdot B = \{x \cdot y \ : \ x \in A,\ y \in B\}.$$

A-t-on toujours $\sup(A \cdot B) = \sup(A).\sup(B)$? Quelle hypothèse peut-on ajouter pour que cela soit vrai ?

Exercice 15. Soit A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. Démontrer les implications suivantes:

1. $\inf(A \cup B) = \min(\inf(A), \inf(B))$,
2. $\sup(A \cap B) \leq \min(\sup(A), \sup(B))$,

Exercice 16. Montrer que la fonction partie entière est croissante.

Exercice 17. On note $E(x)$ la partie entière d'un nombre réel x.

1. Monter que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
$$E(x) + E(y) \leq E(x + y) \leq E(x) + E(y) + 1.$$
2. Calculer $E(x) + E(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $E(x) = E\left(\frac{E(nx)}{n}\right)$.

A faire chez soi

Exercice 18. Soient n un entier naturel et x un réel positif.

1. Combien y a-t-il d'entiers naturels entre 1 et n? entre 1 et x?
2. Combien y a-t-il d'entiers naturels entre 0 et n? entre 0 et x?
3. Combien y a-t-il d'entiers naturels pairs entre 0 et x? Combien y a-t-il d'entiers naturels impairs entre 0 et x ?
4. Combien y a-t-il de multiples de 3 entre 0 et x?
5. Combien l'équation $x+2y=n$, n entier naturel donné et x et y entiers naturels inconnus, a-t-elle de couples solutions ?
6. De combien de façons peut-on payer 10 euros avec des pièces de 10 et 20 centimes d'euros ?

Exercice 19. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes:

1. $(5E(x)+2)\cdot(3E(x)+6)=0$.
2. $(2E(x)+1)^2<4$.

Pour aller plus loin

Exercice 20. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} E\left(x+\frac{k}{n}\right)=E(nx).$$

Exercice 21 (Inégalité de Cauchy-Schwartz). Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1,\dots,a_n$ et $b_1,\dots,b_n \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

Indication: considérer le polynôme $f(x)=\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k x)^2$.