CY Tech

TD Analyse

Réels.

Exercice 1

Les nombres suivants sont-ils des rationnels ? des décimaux ? des irrationnels ?

- $1/3$
- $1/15$
- $1/25$
- $1/125$
- $0,\overline{3}$
- $\sqrt{2}$
- $0.1234567891234567\ldots$

On rappele que un nombre rationnel r est dit **décimal**, si on peut l'écrire sous la forme

$$r = \frac{p}{10^n}, \quad p \in \mathbb{Z}, \ n \in \mathbb{N}.$$

En d'autre termes, un nombre décimale est un nombre réel qui peut s'écrire exactement avec un nombre fini de chiffres après la virgule.

Exercice 1

Le résultant suivant donne une caractérisation des nombres rationnels.

Proposition

Un nombre est rationnel si et seulement s'il admet une écriture décimal périodique ou finie.

Solution : On a :

- $1/3 = 0,\overline{3} \implies 1/3$ est un nombre **rationnel** d'écriture périodique.
- $1/15 = 0,0\overline{6} \implies 1/15$ est un nombre **rationnel** d'écriture périodique.
- $1/25 = \frac{4}{10^2} = 0.04 \implies 1/25$ est un nombre **rationnel** d'écriture décimale finie.
- $1/125 = \frac{8}{10^3} = 0.008 \implies 1/125$ est un nombre **rationnel** d'écriture décimale finie.

Exercice 1

- $0,\overline{3}$: $\implies$ $1/3$ est un nombre **rationnel** d'écriture périodique.
- $\sqrt{2}$: est un nombre **Irrationnel.**
- $0,\overline{123456789}$: est un nombre **rationnel** d'écriture périodique.

Exercice 2

Trouver sous la forme $\frac{p}{q}$ des rationnels x dont les développements décimaux périodiques sont donnés par :

$$3,\overline{14}; \qquad 0,\overline{9}; \qquad 3,14\overline{9};$$

Première Méthode : On commence par rappeler la valeur de la somme géométrique. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 1$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}.$$

Maintenant, si $0 \leq a < 1$, l'égalité précédente nous permet de déduire

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \frac{1}{1-a}.$$

Notation : Pour tout $0 \leq a < 1$, nous allons écrire

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1}{1-a}.$$

Exercice 2

$$3,\overline{14} \stackrel{?}{=} \frac{p}{q}.$$

Solution : On a

$$\begin{aligned}
3.\overline{14} &= 3 + \frac{14}{100} + \frac{14}{100^2} + \frac{14}{100^3} + \cdots \\
&= 3 + \frac{14}{100} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{100}\right)^k \\
&= 3 + \frac{14}{100} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} \\
&= 3 + \frac{14}{100} \cdot \frac{100}{99} \\
&= 3 + \frac{14}{99} = \frac{311}{99}.
\end{aligned}$$

Exercice 2

$$3,14\overline{9} \stackrel{?}{=} \frac{p}{q}.$$

Solution : On a

$$\begin{aligned}
3.14\overline{9} &= \frac{314}{100} + \frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^4} + \frac{9}{10^5} + \cdots \\
&= \frac{314}{100} + \frac{9}{10^3} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k \\
&= \frac{314}{100} + \frac{9}{10^3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} \\
&= \frac{314}{100} + \frac{9}{10^3} \cdot \frac{10}{9} \\
&= \frac{314}{100} + \frac{1}{100} = \frac{315}{100}.
\end{aligned}$$

Exercice 2

Autre Méthode :

$$r = 3,14\overline{9} \stackrel{?}{=} \frac{p}{q}.$$

L'idée est d'abord de faire apparaître la partie périodique juste après la virgule. Ici la période commence deux chiffres après la virgule, donc on multiplie par 100 :

$$100r = 314,\overline{9}. \tag{1}$$

Maintenant on va décaler tout vers la gauche de la longueur d'une période, donc ici on multiplie par 10 pour décaler de 1 chiffre :

$$100 \times 10r = 3149,\overline{9} \tag{2}$$

Les parties après la virgule des lignes (1) et (2) sont les mêmes, donc si on les soustrait en faisant (2)-(1) alors les parties décimales s'annulent :

$$100 \times 10r - 100r = 3149 - 314.$$

Donc $900r = 2835$ et

$$r = \frac{2835}{900} = \frac{315}{100}.$$

Exercice 2

Autre Méthode :

$$r = 3,\overline{14} \stackrel{?}{=} \frac{p}{q}.$$

L'idée est d'abord de faire apparaître la partie périodique juste après la virgule. Ici la période commence immediatement après la virgule, donc on laisse r tel quel :

$$r = 3,\overline{14}. \tag{3}$$

Maintenant on va décaler tout vers la gauche de la longueur d'une période, donc ici on multiplie par 100 pour décaler de 2 chiffres :

$$100 \times r = 314,\overline{14}. \tag{4}$$

Les parties après la virgule des lignes (3) et (4) sont les mêmes, donc si on les soustrait en faisant (4)-(3) alors les parties décimales s'annulent :

$$100 \times r - r = 314 - 3 = 311.$$

Donc $99r = 311$ et

$$r = \frac{311}{99}.$$

À faire chez soi - Exercice 2

$$0,\overline{9} \stackrel{?}{=} \frac{p}{q}.$$

Solution : On a

$$\begin{aligned}
0.\overline{9} &= 0 + \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \cdots \\
&= 0 + \frac{9}{10} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{10} \right)^k \\
&= 0 + \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} \\
&= 0 + \frac{9}{10} \cdot \frac{10}{9} \\
&= 0 + \frac{9}{9} = 1.
\end{aligned}$$

Exercice 3

Montrer que

$$\frac{\ln 3}{\ln 2}$$

est irrationnel.

Avant de donner la preuve rappelons quelque propriétés du logarithme naturel. Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R}_+^*$, on a

- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.
- Pour $p \in \mathbb{R}$, $\ln(a^p) = p \ln(a)$.
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\exp(\ln(a)) = a$.

Exercice 3

Preuve : Nous allons montrer la proposition en raisonnant par l'absurde. Supposons donc que $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ est rationnel et essayons d'arriver à une contradiction. Autrement dit, supposons qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$ tels que

$$\frac{\ln 3}{\ln 2} = \frac{p}{q}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\frac{\ln 3}{\ln 2} = \frac{p}{q} \quad &\Longleftrightarrow \quad p \ln 2 = q \ln 3 \\
&\Longleftrightarrow \quad \ln 2^p = \ln 3^q \\
&\Longleftrightarrow \quad \exp(\ln 2^p) = \exp(\ln 3^q) \\
&\Longleftrightarrow \quad 2^p = 3^q.
\end{aligned}$$

Contradiction ! Par conséquent $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ est irrationnel.

Pour aller plus loin - Exercice 4

1. Démontrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors
$$r + x \notin \mathbb{Q}$$
et si $r \neq 0$ alors
$$r \cdot x \notin \mathbb{Q}.$$
2. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
3. En déduire : entre deux nombres rationnels il y a toujours un nombre irrationnel.

Pour aller plus loin - Exercice 4

La somme et le produit d'un nombre rationnel (non-nul pour le produit) et d'un nombre irrationnel sont des nombres irrationnels.

Rappelons que :

- La somme de deux nombres rationnels est un nombres rationnel. En effet
$$\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + p'q}{qq'} \in \mathbb{Q}.$$
- Le produit de deux nombres rationnels est un nombres rationnel. En effet
$$\frac{p}{q} \cdot \frac{p'}{q'} = \frac{pp'}{qq'} \in \mathbb{Q}.$$

Nous allons montrer la proposition en raisonnant par l'absurde.

Pour aller plus loin - Exercice 4

Solution : Soit $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$.

- Il nous faut montrer que
$$r + x \notin \mathbb{Q}.$$
Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons $r + x \in \mathbb{Q}$. Alors on a
$$x = \underbrace{\underbrace{(x+r)}_{\in \mathbb{Q}} - \underbrace{r}_{\in \mathbb{Q}}}_{\in \mathbb{Q}}.$$
Contradiction ! Par conséquent $r + x \notin \mathbb{Q}$. C'est-à-dire $r + x$ est irrationnel.

- Il nous faut montrer que
$$r \cdot x \notin \mathbb{Q}.$$
Raisonnons par l'absurde et supposons $r \cdot x \in \mathbb{Q}$. Alors on a
$$x = \underbrace{\underbrace{(r \cdot x)}_{\in \mathbb{Q}} \cdot \underbrace{\frac{1}{r}}_{\in \mathbb{Q}}}_{\in \mathbb{Q}}.$$
Contradiction ! Par conséquent $r \cdot x \notin \mathbb{Q}$. C'est-à-dire $r \cdot x$ est irrationnel.

Pour aller plus loin - Exercice 4

En déduire : entre deux nombres rationnels il y a toujours un nombre irrationnel.

Solution : Soient r et r' deux rationnels avec $r < r'$. Définissons

$$i = r + \frac{\sqrt{2}}{2}(r' - r).$$

Puisque $0 < \sqrt{2}/2 < 1$ on déduit

$$0 < \frac{\sqrt{2}}{2}(r' - r) < (r' - r) \quad \Longrightarrow \quad r < r + \frac{\sqrt{2}}{2}(r' - r) < r + (r' - r) = r'.$$

Donc $r < i < r'$. Maintenant

$$\underbrace{\underbrace{r}_{\in\mathbb{Q}} + \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}(r' - r)}_{\notin\mathbb{Q}}}_{\notin\mathbb{Q}}.$$

Par conséquent, i est un nombre irrationnel compris entre r et r'.

Exercice 5

Étant donné un ensemble $A \subset \mathbb{R}$, écrire avec des quantificateurs les propriétés suivantes :

1. 10 est un majorant de A ;
2. m est un minorant de A ;
3. P n'est pas un majorant de A ;
4. A est majoré ;
5. A n'est pas minoré ;
6. A est borné ;
7. A n'est pas borné.

Exercice 5

Solution :

1. 10 est un majorant de A : $\forall x \in A,\ x \leq 10.$
2. m est un minorant de A : $\forall x \in A,\ x \geq m.$
3. P n'est pas un majorant de A : $\exists x \in A,\ x > P.$
4. A est majoré : $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ x \leq M.$
5. A n'est pas minoré : $\forall m \in \mathbb{R},\ \exists x \in A,\ x < m.$
6. A est borné : $\exists M \in \mathbb{R},\ \exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ m \leq x \leq M.$
7. A n'est pas borné : $\forall M \in \mathbb{R},\ \forall m \in \mathbb{R},\ \exists x \in A,\ x < m$ ou $M < x.$

Exercice 6

Soit

$$I = \left\{ x \in \mathbb{R}^* \ : \ -2 < x + \frac{1}{2x} \leq 2 \right\}.$$

1. Montrer que I est la réunion de deux intervalles.

2. Déterminer (s'il existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément de I.

Solution : Par définition

$$x \in I \quad \Longleftrightarrow \quad -2 < x + \frac{1}{2x} \leq 2.$$

Donc pour montrer que I est la réunion de deux intervalles il suffit de résoudre l'inéquation

$$-2 < x + \frac{1}{2x} \leq 2.$$

Exercice 6

Commençons par résoudre l'inégalité à droite. On a

$$x + \frac{1}{2x} \leq 2 \iff x + \frac{1}{2x} - 2 \leq 0 \iff \frac{2x^2 - 4x + 1}{2x} \leq 0.$$

En faisant un tableau de signe on obtient

Valeurs de x	$-\infty$		0		1-$\sqrt{2}/2$		1+$\sqrt{2}/2$		$+\infty$
$2x^2 - 4x + 1$		$+$		$+$		-		$+$	
$2x$		-		$+$		$+$		$+$	
$\frac{2x^2-4x+1}{2x}$		-		$+$		-		$+$	

L'inégalité à droite a donc par ensemble solution, l'ensemble

$$S_d = \left]-\infty, 0\right[\, \cup \, \left[1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

Exercice 6

Pour résoudre l'inégalité à gauche on écrit

$$x + \frac{1}{2x} > -2 \iff x + \frac{1}{2x} + 2 > 0 \iff \frac{2x^2 + 4x + 1}{2x} > 0$$

En faisant un tableau de signe on obtient

Valeurs de x	$-\infty$		-1-$\sqrt{2}/2$		-1+$\sqrt{2}/2$		0		$+\infty$
$2x^2 + 4x + 1$		$+$		-		$+$		$+$	
$2x$		-		-		-		$+$	
$\frac{2x^2+4x+1}{2x}$		-		$+$		-		$+$	

L'inégalité à gauche a donc par ensemble solution, l'ensemble

$$S_g = \left]-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right[\cup \left]0, +\infty\right[.$$

Exercice 6

Par conséquent, la solution de l'inequation $-2 < x + \frac{1}{2x} \leq 2$ est donnée par

$$I = S_g \cap S_d = \left]-1-\frac{\sqrt{2}}{2}, -1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right[\cup \left[1-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

Avec cette description de I on conclut :

- l'ensemble I ne possède pas de minimum.
- le maximum de I est égal à $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- sa borne inférieure est égale à $-1-\frac{\sqrt{2}}{2}$
- sa borne supérieure est égale au maximum, c'est à dire $\sup(I) = 1+\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- les minorants sont tous les réels inférieur ou égal à la borne inférieure. Autrement dit

$$x \text{ est un minorant de } I \quad \Longleftrightarrow \quad x \leq -1-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

- les majorants sont tous les réels supérieur ou égal au maximum. Autrement dit

$$x \text{ est un majorant de } I \quad \Longleftrightarrow \quad x \geq 1+\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Exercice 7

Les ensembles suivants sont-ils majorés ? Minorés ? Si oui, déterminer leur borne inférieure et leur borne supérieure. Ont-t-ils un plus petit élément ? Un plus grand élément ?

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \ x^2 < 2 \right\}$$
$$B = \left\{ 1 + \frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}^* \right\}$$
$$C = \left\{ \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \ : \ p \in \mathbb{N}^*, \ q \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Solution : Commençons avec $A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x^2 < 2\}$. On a

$$x \in A \iff x^2 < 2 \iff -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \iff x \in \left] -\sqrt{2}, \sqrt{2} \right[.$$

Donc

$$A = \left] -\sqrt{2}, \sqrt{2} \right[.$$

Ainsi

$$\sup(A) = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \inf(A) = -\sqrt{2}.$$

Finalement, comme $\pm\sqrt{2} \notin A$, on conclut que l'ensemble A n'admet ni minimum, ni maximum.

Exercice 7

Étudions

$$B = \left\{ 1 + \frac{1}{n} : \; n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Essayons de minorer et majorer l'ensemble B. Pour cela, notons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$0 < \frac{1}{n} \quad \Longrightarrow \quad 1 < 1 + \frac{1}{n}.$$

De même

$$1 \leq n \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{n} \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad 1 + \frac{1}{n} \leq 2.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on déduit

$$1 < 1 + \frac{1}{n} \leq 2$$

Exercice 7

L'inégalité $1 < 1 + \frac{1}{n} \leq 2$ nous permet de conclure :

- L'ensemble B est majoré par tout réel supérieur ou égal à 2. De plus comme
$$2 = 1 + \frac{1}{1} \in I,$$
on conclut
$$\max(B) = 2.$$
On en déduit immédiatement :
$$\sup(B) = 2.$$

- L'ensemble B est minoré par tout réel inférieur ou égal à 1. Notons de plus que
$$\lim_{n \to +\infty} 1 + \frac{1}{n} \ = \ 1.$$
Nous avons donc un candidat « naturel » pour la borne inférieur, à savoir : 1. Montrons que
$$\inf(B) = 1.$$

Exercice 7

On doit pour cela montrer :

$$\begin{cases} 1 \text{ est un minorant de } B \\ 1 \text{ est le plus grand des minorants de } B \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 1 \text{ est un minorant de } B \\ \forall m > 1, \ m \text{ n'est pas un minorant de } B \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 1 \text{ est un minorant de } B \\ \forall m > 1, \ \exists x \in B, \ x < m \end{cases}$$

On sait déjà que 1 est un minorant. Montrons que :

$$\forall m > 1, \ \exists x \in B, \ x < m.$$

Soit $m > 1$, on doit montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$x = 1 + \frac{1}{n} \ < \ m.$$

Cela revient à montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\frac{1}{n} \ < \ m - 1 \quad \iff \quad \frac{1}{m-1} < n.$$

Exercice 7

Maintenant, comme $\mathbb{R}$ n'est pas majoré, on est sûr de pouvoir trouver un entier n, vérifiant

$$\frac{1}{m-1} < n$$

Ainsi, si nous posons

$$x = 1 + \frac{1}{n},$$

on aura

$$x \in B \quad \text{et} \quad x \ < \ m.$$

L'entier m ne peut donc pas être un minorant de B. Donc

$$\inf(B) = 1.$$

Finalement, comme $1 \notin B$, on conclut que l'ensemble B n'admet pas de minimum.

Exercice 7

Méthode 2 : par l'absurde.

Puisque 1 est un minorant de B, on conclut d'après la définition de la borne inferieur que
$$1 \leq \inf(B).$$

Montrons que $1 = \inf(B)$ en raisonnant par l'absurde. Supposons donc que $1 \neq \inf(B)$, c'est-à-dire, supposons
$$1 < \inf(B)$$
et essayons d'arriver à une contradiction. Soit
$$n = E\left(\frac{1}{\inf(B) - 1}\right) + 1$$
Alors
$$\frac{1}{\inf(B) - 1} < n \quad \Longrightarrow \quad \inf(B) > 1 + \frac{1}{n}.$$

Mais $1 + \frac{1}{n} \in B$. **Contradiction !** Donc $1 = \inf(B)$.

Exercice 7

Méthode 3 : à l'aide de la limite.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ posons

$$a_n = 1 + \frac{1}{n} \in B.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$a_n \geq \inf(B).$$

Donc par passage à la limite (la limite preserve les inégalités), on obtient

$$1 = \lim_{n \to +\infty} a_n \geq \lim_{n \to +\infty} \inf(B) = \inf(B).$$

Or, on sait que $1 \leq \inf(B)$. Par conséquent

$$\inf(B) = 1.$$

Exercice 7

Étudions
$$C = \left\{ \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \ : \ p \in \mathbb{N}^*, \ q \in \mathbb{N}^* \right\}.$$
Comme $p \geq 1$ et $q \geq 1$, on a
$$0 < \frac{1}{p} \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 < \frac{1}{q} \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad 0 < \frac{1}{p} \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq -\frac{1}{q} < 0$$
Donc
$$-1 < \frac{1}{p} - \frac{1}{q} < 1.$$
Ce qui montre que C est majoré par tout réel supérieur ou égal à 1 et minoré par tout réel inférieur ou égal à -1. Montrons que
$$-1 = \inf(C) \quad \text{et} \quad 1 = \sup(C).$$

Exercice 7

Montrons que

$$-1 = \inf(C).$$

Solution : En prenant $q = 1$, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\frac{1}{p} - 1 \in C.$$

Ainsi

$$\frac{1}{p} - 1 \geq \inf(C)$$

Donc par passage à la limite (la limite preserve les inégalités), on obtient

$$-1 = \lim_{p \to +\infty} \frac{1}{p} - 1 \geq \lim_{p \to +\infty} \inf(C) = \inf(C).$$

Or, on sait que $-1 \leq \inf(C)$. Par conséquent

$$\inf(C) = -1.$$

Comme $-1 \notin C$, on conclut que l'ensemble C n'admet pas de minimum.

Exercice 7

Montrons que

$$1 = \sup(C).$$

Solution : En prennant $p = 1$, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$ on a

$$1 - \frac{1}{q} \in C.$$

Ainsi

$$1 - \frac{1}{q} \leq \sup(C)$$

Donc par passage à la limite (la limite preserve les inégalités), on obtient

$$1 = \lim_{q \to +\infty} 1 - \frac{1}{q} \leq \lim_{q \to +\infty} \sup(C) = \sup(C).$$

Or, on sait que $1 \geq \sup(C)$. Par conséquent

$$\sup(C) = 1.$$

Comme $1 \notin C$, on conclut que l'ensemble C n'admet pas de maximum.

Exercice 8

1. Montrer que, $\forall n, m \in \mathbb{N}^*$
$$0 < \frac{mn}{(m+n)^2} \leq \frac{1}{4}.$$
2. En déduire que
$$A = \left\{ \frac{mn}{(m+n)^2},\ n \in \mathbb{N}^*,\ m \in \mathbb{N}^* \right\}$$
admet une borne supérieure et inférieure que l'on déterminera.

Solution : Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall m \in \mathbb{N}^*$ on a
$$0 < \frac{mn}{(m+n)^2} \leq \frac{1}{4}.$$
Pour montrer l'inégalité a gauche, notons que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall m \in \mathbb{N}^*$ on a
$$mn > 0 \quad \text{et} \quad (m+n)^2 > 0.$$
Donc
$$0 < \frac{mn}{(m+n)^2}.$$

Exercice 8

Pour montrer celle de droite on écrit

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}-\frac{mn}{(m+n)^2} &= \frac{(m+n)^2-4mn}{4(m+n)^2}\\ &= \frac{m^2-2mn+n^2}{4(m+n)^2}\\ &= \frac{(m-n)^2}{4(m+n)^2}\geq 0.\end{aligned}$$

D'où on conclut que

$$0<\frac{mn}{(m+n)^2}\leq\frac{1}{4}.$$

Ainsi, A est un ensemble non vide, minorée par 0 et majorée par $\frac{1}{4}$. Donc $\inf(A)$ et $\sup(A)$ existent.

Exercice 8

Déterminons la borne supérieure et inférieure de l'ensemble

$$A = \left\{ \frac{mn}{(m+n)^2} \;:\; n \in \mathbb{N}^*,\; m \in \mathbb{N}^* \right\}$$

- **Borne supérieure :** Notons d'abord que pour $m = 1$ et $n = 1$ on a

$$\frac{1 \cdot 1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}.$$

Donc $\frac{1}{4} \in A$. Ainsi

$$\frac{1}{4} \leq \sup(A).$$

Maintenant, comme

$$\forall n \in \mathbb{N},\; \forall m \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{mn}{(m+n)^2} \leq \frac{1}{4}$$

on déduit, car $\sup(A)$ est le plus petit de majorants, que $\sup(A) \leq \frac{1}{4}$ d'où on conclut l'égalité

$$\sup(A) = \frac{1}{4}.$$

On aurait pu conclure plus rapidement en remarquant que $1/4 = \max(A)$, en effet $1/4$ est un majorant de A qui appartient à A. Donc

$$\sup(A) = \max(A) = 1/4.$$

Exercice 8

- **Borne inférieure :** D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$ on a
$$0 < \frac{mn}{(m+n)^2}.$$

Ainsi 0 définit un minorant de A. Montrons que
$$0 = \inf(A).$$

On doit pour cela montrer :
$$\begin{aligned}
& \begin{cases} 0 \text{ est un minorant de } A \\ 0 \text{ est le plus grand des minorants de } A \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} 0 \text{ est un minorant de } A \\ \forall a > 0, \ a \text{ n'est pas un minorant de } A \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} 0 \text{ est un minorant de } A \\ \forall a > 0, \ \exists x \in A, \ x < a \end{cases}
\end{aligned}$$

On sait déjà que 0 est un minorant. Montrons que :
$$\forall a > 0, \ \exists x \in A, \ x < a.$$

Soit $a > 0$, on doit montrer qu'il existe un couple $(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que
$$x = \frac{mn}{(m+n)^2} \ < \ a.$$

Exercice 8

On peut simplifier le travail en imposant $m = 1$, et en cherchant n tel que

$$\frac{n}{(1+n)^2} < a$$

Cela revient à montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)^2}{n} > \frac{1}{a} \quad &\iff \quad \frac{n^2+2n+1}{n} > \frac{1}{a} \\ &\iff \quad n+2+\frac{1}{n} > \frac{1}{a}. \end{aligned} \tag{5}$$

Or $n + 2 + \frac{1}{n} > n + 2$. Par conséquent, pour vérifier l'inégalité (5), il suffit de montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$n+2 > \frac{1}{a} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{a} - 2 < n.$$

Maintenant, comme $\mathbb{R}$ est archimédien, on est sûr de pouvoir trouver un entier n, vérifiant

$$\frac{1}{a} - 2 < n.$$

Exercice 8

Ainsi, il existe

$$x \in A,\ \ x = \frac{n}{(n+1)^2} \ < \ a.$$

Le nombre a ne peut donc pas être un minorant de A. Donc

$$\inf(A) = 0.$$

Exercice 8

Méthode 2 : par l'absurde. D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$ on a

$$0 < \frac{mn}{(m+n)^2}.$$

Ainsi 0 définit un minorant de A et on obtient d'après la definition de la borne inferieur que

$$0 \leq \inf(A).$$

Montrons que $0 = \inf(A)$ en raissonant par la absurde. Supposons donc que

$$0 < \inf(A)$$

et essayons d'arriver à une contradiction. Soit

$$n = E\left(\frac{1}{\inf(A)}\right) + 1$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{\inf(A)} < n \quad &\Longrightarrow \quad \inf(A) > \frac{1}{n} \\ &\Longrightarrow \quad \inf(A) > \frac{1}{n} = \frac{n}{n^2} > \frac{n}{(n+1)^2} = \frac{n \cdot 1}{(n+1)^2}. \end{aligned}$$

Mais $\frac{n \cdot 1}{(n+1)^2} \in A$. Contradiction ! Donc $0 = \inf(A)$.

Méthode 3 : à l'aide de la limite.

En prenant $m = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ posons

$$a_n = \frac{n}{(n+1)^2} \in A.$$

Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on a

$$a_n \geq \inf(A).$$

Donc par passage à la limite (la limite preserve les inégalités), on obtient

$$0 = \lim_{n \to +\infty} a_n \geq \lim_{n \to +\infty} \inf(A) = \inf(A).$$

Or, on sait que $0 \leq \inf(A)$. Par conséquent

$$\inf(A) = 0.$$

Exercice 9

Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que pour tout x de A et tout y de B on ait

$$x \leq y.$$

Démontrer que $\sup(A)$ et $\inf(B)$ existent et que $\sup(A) \leq \inf(B)$.

Solution : On a

$$x \leq y \qquad \forall x \in A,\ \forall y \in B.$$

Comme A et B sont non vides, on déduit :

- n'importe quel élément de B est un majorant de A. Par conséquent, $\sup(A)$ existe.
- n'importe quel élément de A est un minorant de B. Par conséquent, $\inf(B)$ existe.

Maintenant, puisque

$$x \leq y \qquad \forall x \in A,\ \forall y \in B.$$

et $\sup(A)$ et le plus petit des majorants de A, on déduit

$$\sup(A) \leq y, \quad \forall y \in B.$$

Exercice 9

Ainsi $\sup(A)$ est un minorant de B, et comme $\inf(B)$ est le plus grand minorant de B, on conclut

$$\sup(A) \leq \inf(B).$$