LOGIQUE ET RAISONNEMENT - TD

1 Logique

Exercice 1.1. Soit P, Q et R trois propositions.
Démontrer les équivalences suivantes en utilisant des tables de vérité.

1. $(P \text{ ou } P) \iff P$
2. $(P \text{ et } Q) \iff (Q \text{ et } P)$
3. $\text{non}(P \text{ ou } Q) \iff (\text{non}(P) \text{ et } \text{non}(Q))$
4. $(P \text{ ou } (Q \text{ ou } R)) \iff ((P \text{ ou } Q) \text{ ou } R)$
5. $(P \text{ ou } (Q \text{ et } R)) \iff ((P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R))$
6. $(P \Longrightarrow Q) \iff (\text{non}(P) \text{ ou } Q)$
7. $(P \iff Q) \iff (\text{non}(P) \iff \text{non}(Q))$

A faire chez soi

8. $\text{non}(\text{non}(P)) \iff P$
9. $(P \ \text{ et } P) \iff P$
10. $(P \text{ ou } Q) \iff (Q \text{ ou } P)$
11. $(P \text{ et } (Q \ \text{ et } R) \iff ((P \text{ et } Q) \text{ et } R)$
12. $(P \text{ et } (Q \text{ ou } R)) \iff ((P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R))$
13. $(P \text{ ou } Q) \iff (\text{non}(P) \Longrightarrow Q)$

Exercice 1.2. Soient P, Q et R deux propositions. Les propositions « P ou (Q et R) »et « (P ou Q) et R » sont-elles équivalentes ?

Exercice 1.3. Sans utiliser de table de vérité mais en utilisant les différentes propriétés déjà démontrées montrer que :

1. $(\text{non}(P \Longrightarrow Q)) \iff (P \text{ et } \text{non}(Q))$
2. $(P \text{ ou } Q) \iff (\text{non}(P) \Longrightarrow Q)$

Exercice 1.4. Traduire en toutes lettres les huit propositions suivantes lorsque x désigne un individu, y un film et que $\mathscr{P}(x, y)$ est la proposition « L'individu x a vu le film y ».

1. $\forall x, \forall y, \mathscr{P}(x, y)$
2. $\exists x, \forall y, \mathscr{P}(x, y)$
3. $\exists x, \exists y, \mathscr{P}(x, y)$
4. $\exists y, \exists x, \mathscr{P}(x, y)$
5. $\forall y, \exists x, \mathscr{P}(x, y)$

A faire chez soi

6. $\exists y, \forall x, \mathscr{P}(x, y)$
7. $\forall x, \exists y, \mathscr{P}(x, y)$

Exercice 1.5. Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles. Exprimer verbalement la signification des propositions suivantes :

1. $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) = \lambda$
2. $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in I,\ f(x) = y$
3. $\forall x \in I,\ f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
4. $\forall (x; y) \in I^2,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
5. $\forall \epsilon > 0,\ \forall y \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x - y| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$
6. $\forall \epsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ |x - y| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$

Exercice 1.6. Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles. Exprimer à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes :

1. f est l'application nulle.
2. f n'est pas l'application nulle.
3. La fonction f s'annule.
4. f ne s'annule pas sur I.
5. La fonction f ne prend jamais deux fois la même valeur.
6. La fonction f prend des valeurs arbitrairement grandes.

A faire chez soi

7. f est une fonction constante.
8. La fonction f n'est pas une fonction constante.
9. La fonction f présente un minimum.
10. f est une fonction affine.

Exercice 1.7. Donner la négation des phrases suivantes

1. $x \geq 3$
2. $0 < x \leq 2$
3. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$
5. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y^2 > x$
6. P et non(Q)
7. $(P \text{ et } Q) \Longrightarrow (R \Longrightarrow S)$
8. Dans toutes les écuries, tous les chevaux sont noirs.
9. Pour tout entier x, il existe un entier y tel que, pour tout entier z, la relation $z < x$ implique la relation $z < x + 1$
10. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \left(\left|x - \frac{7}{5}\right| < \alpha \Longrightarrow |5x - 7| < \varepsilon\right)$

A faire chez soi

11. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$
12. P ou $(Q$ et $R)$
13. Tout triangle rectangle possède un angle droit.
14. Tous les habitants de la rue du Havre qui ont les yeux bleus gagneront au loto et prendront leur retraite avant 50 ans.

Exercice 1.8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Indiquer la différence de sens entre les deux propositions :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y = f(x)$ et $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y = f(x)$
2. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, y = f(x)$ et $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y = f(x)$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$ et $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$

A faire chez soi

Exercice 1.9. (M) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Pour chacune des propositions suivantes, donner graphiquement à main levée un exemple de fonction f NE la vérifiant PAS (contre-exemple).

1. $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq M$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 1$ ou $f(x) \leq -1$

Exercice 1.10. (M) Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction a valeurs réelles définie sur I. Exprimer les négations des propositions suivantes :

1. $\forall x \in I, f(x) \neq 0$
2. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, |f(x)| \leq M$
3. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) = y$
4. $\forall (x; y) \in I^2, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

Exercice 1.11. (M) Compléter les pointillés par le connecteur logique qui s'impose ($\Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow$))

1. $x \in \mathbb{R}; x^2 = 4 \ldots\ldots x = 2$
2. $z \in \mathbb{C}; z = \bar{z} \ldots\ldots, z \in \mathbb{R}$
3. $x \in \mathbb{R}; x = \pi \ldots\ldots \mathrm{e}^{2ix} = 1$

Exercice 1.12. (M) Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 2 \Rightarrow x \geq 3$
2. $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ x < y \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$
3. $\exists x \in \mathbb{R}_+^*,\ x < \sqrt{x}$
4. $\exists n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \geq 100$

2 Raisonnements

Exercice 2.1.

a. Soit x un irrationnel positif. Montrer que $\sqrt{x}$ est irrationnel.

b. Montrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Exercice 2.2. Démontrer, en raisonnant par l'absurde, que si $n \in \mathbb{N}^{\times}$, alors $n^2 + 1$ n'est pas le carré d'un entier naturel

Exercice 2.3. Montrer que lorsqu'un réel peut être écrit sous la forme $a + b\sqrt{2}$ avec a et b appartenant à $\mathbb{Z}$, alors les entiers a et b sont nécessairement uniques.

Exercice 2.4.

1. Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'écrit de façon unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
2. Donner cette décomposition si $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+x+1}$

A faire chez soi

Exercice 2.5. (M) Soit a et b deux réels. Montrer que

$$\left(a^2 + b^2 = 0\right) \Rightarrow (a = b = 0).$$

Exercice 2.6. (M) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Montrer que

$$(f \text{ impaire }) \Rightarrow (f(0) = 0).$$

Exercice 2.7. (M) Deux joueurs s'affrontent sur le jeu suivant. Ils disent chacun à leur tour un nombre entre 1 et 7 . Les nombres sont additionnés et dès que le cumul des nombres qu'ils ont proposés vaut 100, le jeu est fini. Le joueur qui a atteint 100 et a donc parlé en dernier gagne. Comment jouer ?

Exercice 2.8. (M) Un vol a été commis dans un asile. Trois pensionnaires A, B et C sont suspects. Voici leurs témoignages, chacun formulant trois assertions :

A : Je suis innocent. À l'heure du vol, j'étais avec B. C'est C le coupable.

B : Je suis innocent. A aussi. A n'était pas avec moi à l'heure du vol.

C : Je suis innocent. B aussi. A a menti trois fois.

Vous savez que chaque suspect a au moins menti une fois sur ses trois affirmations. Qui est le coupable ?

Exercice 2.9. (M) Thomas, Jules et Yves sont partis contempler des oiseaux. Chacun a vu un oiseau que les deux autres n'ont pas vu. Chaque deux ont vu un oiseau que le troisième n'a pas vu, et un oiseau a été vu par les trois. Parmi les oiseaux que Thomas a vus, deux sont jaunes. Pami ceux vus par Jules, trois sont jaunes, et pami ceux vus par Yves, quatre sont jaunes. Combien d'oiseaux jaunes ont été vus au total ? Combien d'oiseaux non jaunes ont été vus au total ?

Exercice 2.10. Démontrer que pour tout entier naturel non nul n on a

$$n! \geq 2^{n-1}.$$

Exercice 2.11. Démontrer par récurrence les égalités suivantes pour tout entier naturel non nul n.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$

Exercice 2.12.

a) Démontrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, 7 divise $3^{2n+1} + 2^{n+2}$.

b) Soit un entier $a \geq 2$ tel que 3 divise $a^2 - a$. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$, 3 divise $a^n - a$

c) Démontrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, 17 divise $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$.

Exercice 2.13. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle déterminée par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : u_n = 2^n + 1$.

A faire chez soi

Exercice 2.14.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

Exercice 2.15.

a) Démontrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, 3 divise $(4^n + 2)$.

b) Supposons a impair. Démontrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ 2^{n+2} divise $a^{2^n} - 1$.

Exercice 2.16. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle déterminée par $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = n(n-1)$.

Pour aller plus loin

Exercice 2.17. Démontrer que

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Exercice 2.18. On revient sur la propriété :

«Tout ensemble fini de $\mathbb{N}$ non vide admet un plus grand élément.»

Pour définir $\mathbb{N}$, on peut soit admettre cette propriété et démontrer l'axiome de récurrence, soit admettre l'axiome de récurrence et en déduire cette propriété. Démontrer que si l'on admet l'axiome de récurrence, on peut démontrer la propriété.