TD1 - Séries Numériques

Partie I - Séries numériques à termes positifs

Exercice 1
Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \cos\frac{1}{n^2}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n n}{n+1}$
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
4. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

Réponse 1

1. Étude de la série $\sum \cos\frac{1}{n^2}$: On a :
$$\cos\frac{1}{n^2} \to 1 \neq 0$$
donc la série $\displaystyle\sum \cos\frac{1}{n^2}$ est divergente car elle ne vérifie pas la condition nécessaire de convergence.

2. Étude de la série $\sum \frac{(-1)^n n}{n+1}$: On a :
$$\left|\frac{(-1)^n n}{n+1}\right| = \frac{n}{n+1} \to 1 \neq 0$$
donc la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n n}{n+1}$ est divergente car elle ne vérifie pas la condition nécessaire de convergence.

3. Étude de la série $\sum \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$: On a :
$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = n\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1+o(1) \to 1$$
donc :
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e \neq 0$$
d'où la série $\displaystyle\sum \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ est divergente car elle ne vérifie pas la condition nécessaire de convergence.

4. Étude de la série $\sum \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2}$: On a :
$$\begin{aligned}\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2} &= n^2\ln\cos\frac{1}{n} = n^2\ln\left(1-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &= n^2\left(-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = -\frac{1}{2}+o(1) \to -\frac{1}{2}\end{aligned}$$
donc :
$$\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2} \to \frac{1}{\sqrt{e}} \neq 0$$
d'où la série $\displaystyle\sum \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ est divergente car elle ne vérifie pas la condition nécessaire de convergence.

Exercice 2
Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n^2+1}{n^2}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{2}{\sqrt{n}}$
3. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^3}$
4. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(ne^{\frac{1}{n}} - n\right)$
5. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(\ln(n))^n}$
6. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \ln\left(1+e^{-n}\right)$

Réponse 2

1. $\dfrac{n^2+1}{n^2} \to 1 \neq 0$ donc la série diverge.
2. $\dfrac{2}{\sqrt{n}} = \dfrac{2}{n^{\frac{1}{2}}}$. On reconnait une série de Riemann divergente avec $\alpha = \frac{1}{2} \leq 1$.
3. $\dfrac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^3} \sim \dfrac{2^4}{7^3} \times \dfrac{1}{n^2}$. On reconnait une série de Riemann convergente avec $\alpha = 2 > 1$.
4. $ne^{\frac{1}{n}} - n = n\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) = n\left(1 + \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1\right) = 1 + o(1) \to 1 \neq 0$. La série diverge.
5. D'après la règle de Cauchy $(u_n)^{\frac{1}{n}} = \left(\dfrac{1}{(\ln(n))^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{\ln(n)} \to 0 < 1$ donc la série de terme général u_n converge.
6. $\ln\left(1+e^{-n}\right) \sim e^{-n} = \left(\dfrac{1}{e}\right)^n$. On reconnait une série géométrique de raison dans $]-1,1[$ donc convergente.

Exercice 3
Soit (u_n) une suite de réels positifs et $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ sont de même nature.

Réponse 3
Il s'agit de montrer l'équivalence

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n \text{ converge}$$

$\Rightarrow$ Si $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. On en déduit que $v_n = \frac{u_n}{1+u_n} \sim u_n$ et comme $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ sont à termes positifs on peut conclure par le Théorème d'équivalence que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge.

$\Leftarrow$ Réciproquement, si $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$. Or

$$v_n = \frac{u_n}{1+u_n} \Leftrightarrow u_n = \frac{v_n}{1-v_n}$$

donc $v_n \sim u_n$ et comme les deux séries sont à termes positifs on peut conclure que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

Remarque : Si $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge grossièrement alors on remarque que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n \neq 0$, et réciproquement. On a donc aussi équivalence des divergences grossières des deux séries.

Exercice 4
Etudier la nature et, le cas échéant, calculer la somme des séries de terme général :

1. $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$
2. $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$
3. $u_n = \dfrac{2n-1}{n\left(n^2-4\right)}$
4. $u_n = \ln\left(1 - \dfrac{1}{(n+2)^2}\right)$

Réponse 4

1. $u_n \sim \dfrac{1}{n^2}$ qui est une suite de Riemann convergente avec $\alpha = 2 > 1$ donc la série de terme général u_n converge. On décompose cette fraction en élément simple
$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$
$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k'=2}^{n+1}\frac{1}{k'}$$
En posant $k' = k+1$ dans la seconde somme. $k = 1 \Rightarrow k' = 2$ et $k = n \Rightarrow k' = n+1$
$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}$$
En changeant k' en k.
$$\sum_{k=1}^{n} u_k = 1 - \frac{1}{n+1}$$
Car tous les termes entre $k = 2$ et $k = n$ se simplifient.
$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} u_k = 1$$

2. $u_n \sim \dfrac{1}{n^3}$ qui est une suite de Riemann convergente avec $\alpha = 3 > 1$ donc la série de terme général u_n converge. On décompose cette fraction en élément simple
$$u_n = \frac{\frac{1}{2}}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{\frac{1}{2}}{n+2}$$
$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\frac{1}{2}}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{\frac{1}{2}}{k+2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2}$$
Dans la seconde somme on pose $k' = k+1, k = 1 \Rightarrow k' = 2$ et $k = n \Rightarrow k' = n+1$.
Dans la troisième somme on pose $k'' = k+2, k = 1 \Rightarrow k'' = 3$ et $k = n \Rightarrow k'' = n+3$
$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k'=2}^{n+1}\frac{1}{k'} + \frac{1}{2}\sum_{k''=3}^{n+2}\frac{1}{k''}$$
On change k' en k et k'' en k
$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k}$$
On va réunir les valeurs de k comprises entre $k = 3$ et $k = n$
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} u_k &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}\right) - \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}\end{aligned}$$

Les trois dernières sommes s'annulent et il reste

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{4}$$

3. $u_n \sim \frac{1}{n^2}$ qui est une suite de Riemann convergente car $\alpha = 2 > 1$ donc la série de terme général u_n converge. On décompose cette fraction en élément simple

$$u_n = \frac{2n-1}{n(n-2)(n+2)} = \frac{\frac{1}{4}}{n} + \frac{\frac{3}{8}}{n-2} + \frac{-\frac{5}{8}}{n+2}$$

$$\sum_{k=3}^{n} u_k = \sum_{k=3}^{n}\left(\frac{\frac{1}{4}}{k} + \frac{\frac{3}{8}}{k-2} + \frac{-\frac{5}{8}}{k+2}\right) = \frac{1}{4}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} + \frac{3}{8}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k-2} - \frac{5}{8}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k+2}$$

Dans la seconde somme on pose $k' = k-2, k=3 \Rightarrow k'=1$ et $k=n \Rightarrow k'=n-2$.
Dans la troisième somme on pose $k'' = k+2, k=3 \Rightarrow k''=5$ et $k=n \Rightarrow k''=n+2$

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{4}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} + \frac{3}{8}\sum_{k'=1}^{n-2}\frac{1}{k'} - \frac{5}{8}\sum_{k''=5}^{n+2}\frac{1}{k''}$$

On change k' en k et k'' en k

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{4}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} + \frac{3}{8}\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k} - \frac{5}{8}\sum_{k=5}^{n+2}\frac{1}{k}$$

On va réunir les valeurs de k comprises entre $k=5$ et $k=n-2$

$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{n} u_k = {} & \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \sum_{k=3}^{n-2}\frac{1}{k} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right) + \frac{3}{8}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\sum_{k=5}^{n-2}\frac{1}{k}+\frac{1}{n+1}\right)\\ & - \frac{5}{8}\left(\sum_{k=5}^{n-2}\frac{1}{k} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)\\ = {} & \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right) + \frac{3}{8}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) - \frac{5}{8}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)\\ & + \frac{1}{4}\sum_{k=3}^{n-2}\frac{1}{k} + \frac{3}{8}\sum_{k=3}^{n-2}\frac{1}{k} - \frac{5}{8}\sum_{k=3}^{n-2}\frac{1}{k}\end{aligned}$$

Les trois dernières sommes s'annulent et il reste

$$\sum_{k=3}^{n} u_k = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right) + \frac{3}{8}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) - \frac{5}{8}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$$

$$\sum_{k=3}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) + \frac{3}{8}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) = \frac{7}{48} + \frac{25}{32} = \frac{89}{96}$$

4. $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{(n+2)^2}\right) \sim -\frac{1}{(n+2)^2} \sim -\frac{1}{n^2}$, il s'agit d'une suite de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$, la série converge. Petit calcul

$$1 - \frac{1}{(k+2)^2} = \frac{(k+2)^2 - 1}{(k+2)^2} = \frac{(k+2-1)(k+2-1)}{(k+2)^2} = \frac{(k+3)(k+1)}{(k+2)^2}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{(k+2)^2}\right) = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{(k+3)(k+1)}{(k+2)^2}\right) = \sum_{k=1}^{n}\ln(k+3) + \sum_{k=1}^{n}\ln(k+1) - 2\sum_{k=1}^{n}\ln(k+2)$$

Dans la première somme on pose $k' = k+3, k=1 \Rightarrow k' = 4, k = n \Rightarrow k' = n+3$.
Dans la deuxième somme on pose $k'' = k+1, k=1 \Rightarrow k'' = 2, k = n \Rightarrow k'' = n+1$.
Dans la troisième somme on pose $k''' = k+2, k=1 \Rightarrow k''' = 3, k = n \Rightarrow k'' = n+2$

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{(k+2)^2}\right) = \sum_{k'=4}^{n+3} \ln(k') + \sum_{k''=2}^{n+1} \ln(k'') - 2\sum_{k'''=3}^{n+2} \ln(k''')$$

On remplace k^r, k'' et k''' par k

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{(k+2)^2}\right) = \sum_{k=4}^{n+3} \ln(k) + \sum_{k=2}^{n+1} \ln(k) - 2\sum_{k=3}^{n+2} \ln(k)$$

On va réunir les sommes entre $k = 4$ et $k = n+1$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{(k+2)^2}\right) & \\ &= \left(\sum_{k=4}^{n+1} \ln(k) + \ln(n+2) + \ln(n+3)\right) + \left(\ln(2) + \ln(3) + \sum_{k=4}^{n+1} \ln(k)\right) \\ &\quad - 2\left(\ln(3) + \sum_{k=4}^{n+1} \ln(k) + \ln(n+1)\right)\end{aligned}$$

Les sommes de $\ln(k)$ de $k = 4$ à $k = n+1$ s'éliminent.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{(k+2)^2}\right) &= (\ln(n+2) + \ln(n+3)) + (\ln(2) + \ln(3)) - 2(\ln(3) + \ln(n+1)) \\ &= \ln\left(\frac{(n+2)(n+3)}{(n+1)^2}\right) + \ln(2) - \ln(3)\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)(n+3)}{(n+1)^2} = 1$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{(k+2)^2}\right) = \ln(2) - \ln(3) = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

Exercice 5 (Séries de Bertrand)

1. Montrer que
$$\forall n \geq 2, \quad \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k} \geq \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2)$$
2. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n \ln n}$.
3. Montrer que
$$\forall n \geq 3, \quad \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k \ln^2 k} \leq \frac{1}{\ln 2}$$
4. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n \ln^2 n}$.

Réponse 5

1. Soit $n \geq 2$. La fonction $f(t) = \frac{1}{t\ln t}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$ donc :
$$\forall k \geq 2, \forall t \in [k, k+1], \frac{1}{t\ln t} \leq \frac{1}{k\ln k}$$
d'où :
$$\forall k \geq 2, \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{k\ln k} = \frac{1}{k\ln k}\int_k^{k+1} \mathrm{d}t = \frac{1}{k\ln k}[t]_k^{k+1} = \frac{1}{k\ln k}(k+1-k) = \frac{1}{k\ln k}$$
On déduit que :
$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} \geq \sum_{k=2}^{n}\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = \int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} &= \int_2^{n+1} \frac{(\ln t)^t}{\ln t}\ \mathrm{d}t \\ &= \int_2^{n+1} (\ln(\ln t))^t\ \mathrm{d}t = [\ln(\ln t)]_2^{n+1} = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2)\end{aligned}$$
2. On a :
$$\forall n \geq 2, \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} \geq \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2)$$
et $\ln(\ln(n+1)) \to +\infty$ donc la série positive $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln n}$ est divergente car sa suite des sommes partielles n'est pas majorée.
3. Soit $n \geq 3$. La fonction $f(t) = \frac{1}{t\ln^2 t}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$ donc:
$$\forall k \geq 2, \forall t \in [k, k+1], \frac{1}{t\ln t} \geq \frac{1}{(k+1)\ln^2(k+1)}$$
d'où $\forall k \geq 2$:
$$\begin{aligned}\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln^2 t} \geq \int_k^{k+1} &\frac{\mathrm{d}t}{(k+1)\ln^2(k+1)} \\ &= \frac{1}{(k+1)\ln^2(k+1)}\int_k^{k+1} \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{(k+1)\ln^2(k+1)}[t]_k^{k+1} \\ &= \frac{1}{(k+1)\ln^2(k+1)}(k+1-k) = \frac{1}{(k+1)\ln^2(k+1)}\end{aligned}$$
On déduit que :
$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k+1)\ln^2(k+1)} &\leq \sum_{k=2}^{n}\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln^2 t} \\ &= \int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln^2 t} \\ &= \int_2^{n+1} \frac{(\ln t)'}{\ln^2 t}\ \mathrm{d}t \\ &= -\int_2^{n+1} \left(\frac{1}{\ln t}\right)' \mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{1}{\ln t}\right]_2^{\mathrm{n+1}} \\ &= \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(n+1)} \leq \frac{1}{\ln 2}\end{aligned}$$
4. On a:
$$\forall n \geq 3, \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln^2 k} \leq \frac{1}{\ln 2}$$
donc la série positive $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln^2 n}$ est convergente car sa suite des sommes partielles est majorée.

Exercice 6
Etudier la nature de la série de terme général

1. $u_n = \dfrac{n+1}{n^3-7}$
2. $u_n = \dfrac{n+1}{n^2-7}$
3. $u_n = \dfrac{n+1}{n-7}$
4. $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
5. $u_n = \dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}}$
6. $u_n = \dfrac{1}{\ln(n^2+2)}$
7. $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n^{\frac{3}{2}}}$
8. $u_n = \dfrac{n^n}{2^n}$
9. $u_n = \dfrac{2^n+3^n}{n^2+\ln(n)+5^n}$
10. $u_n = \dfrac{1}{n!}$
11. $u_n = \dfrac{n^{10000}}{n!}$
12. $u_n = \dfrac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n-1)!}$
13. $u_n = \left(\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^n$
14. $u_n = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$
15. $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$

Réponse 6

1. La suite (u_n) est de signe constant
$$u_n \sim \frac{1}{n^2}$$
C'est le terme général d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 2 > 1$
2. La suite (u_n) est de signe constant
$$u_n \sim \frac{1}{n}$$
C'est le terme général d'une série de Riemann divergente avec $\alpha = 1 \leq 1$
3. $u_n \to 1 \neq 0$ la série diverge grossièrement
4. La suite (u_n) est de signe constant
$$u_n \sim \frac{1}{n^2}$$
C'est le terme général d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 2 > 1$
5. Méfiance
$$u_n = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}} = \frac{1}{n} n^{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{n} e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}\ln(n)}$$
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}} = 0$ on a
$$\lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}\ln(n)} = 1$$
Ce qui montre que $u_n \sim \dfrac{1}{n}$. C'est le terme général d'une série de Riemann divergente avec $\alpha = 1 \leq 1$
6. u_n est de signe constant
$$u_n = \frac{1}{\ln(n^2+2)} = \frac{1}{\ln\left(n^2\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\right)} = \frac{1}{2\ln(n)+\ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right)} = \frac{1}{2\ln(n)+\frac{2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$
On remarque que
$$n^{\frac{1}{2}} u_n = n^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2\ln(n)+\frac{2}{n^2}+\circ\left(\frac{1}{n^2}\right)} \to +\infty$$
D'après les règles de Riemann $n^a u_n \to +\infty$ avec $\alpha < 1$ entraine que la série de terme général u_n diverge.

7. u_n est de signe constant
$$n^{\frac{5}{4}} u_n = n^{\frac{5}{4}} \frac{\ln(n)}{n^{\frac{3}{2}}} = \frac{\ln(n)}{n^{\frac{1}{4}}} \to 0$$
D'après les règles de Riemann $n^a u_n \to +\infty$ avec $\alpha > 1$ entraine que la série de terme général u_n converge.

8. u_n est de signe constant
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{n+1}{n} \times \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} < 1$$
D'après la règle de D'Alembert la série de terme général u_n converge.

9. u_n est de signe constant
$$u_n = \frac{2^n + 3^n}{n^2 + \ln(n) + 5^n} \sim \frac{3^n}{5^n} = \left(\frac{3}{5}\right)^n$$
$\left(\frac{3}{5}\right)^n$ est le terme général d'une série géométrique convergente, la série de terme général u_n converge.

10. u_n est de signe constant
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{n+1} \to 0 < 0$$
D'après la Règle de D'Alembert la série de terme général u_n converge.

11. u_n est de signe constant
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)^{10000}}{(n+1)!}}{\frac{n^{10000}}{n!}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{10000} \frac{n!}{(n+1)!} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{10000} \times \frac{1}{n+1} \to 0 < 1$$
D'après la Règle de D'Alembert la série de terme général u_n converge.

12. u_n est de signe constant
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{4^{n+2}((n+2)!)^2}{(2n+1)!}}{\frac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n-1)!}} = \frac{4^{n+2}((n+2)!)^2(2n-1)!}{4^{n+1}((n+1)!)^2(2n+1)!} = 4\frac{((n+2)^2((n+1)!)^2(2n-1)!}{((n+1)!)^2(2n+1)2n(2n-1)!}$$
$$= 4\frac{(n+2)^2}{(2n+1)2n} \sim 1$$
Là on peut rien dire sauf si on arrive à montrer que la limite est 1 par valeur supérieure
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 4\frac{(n+2)^2}{(2n+1)2n} = \frac{4\left(n^2+4n+4\right)}{4n^2+2n} = \frac{4n^2+16n+16}{4n^2+2n} > 1$$
Donc la limite est 1^+ et donc la série de terme général diverge.

13. u_n est de signe constant
$$u_n = \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = e^{n\sin\left(\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)} = e^{1-\frac{1}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)} \to \frac{1}{e} \neq 0$$
La série de terme général u_n diverge grossièrement.
Remarque : il était inutile de faire un développement limité à l'ordre 3 de $\sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

14. u_n est de signe constant
$$u_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} = e^{n^2\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} = e^{n^2\left(-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = e^{-n\frac{1}{2}+o(1)} = e^{-n}e^{-\frac{1}{2}+o(1)} \sim \frac{1}{\sqrt{e}}\left(\frac{1}{e}\right)^n$$
$\frac{1}{\sqrt{e}}\left(\frac{1}{e}\right)^n$ est le terme général d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{e}$ strictement inférieure à 1. La série de terme général u_n converge.

15.

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} > 1$$

Donc u_n ne peut pas tendre vers 0 .

Exercice 7
Étudier la nature de la série de terme général :

$$u_n = \left(\sqrt{n^2 + an + 2} - \sqrt{n^2 + bn + 1}\right)^n, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2, a \geq b.$$

Réponse 7
La forme même du terme général suggère d'utiliser la règle de Cauchy. Observons d'abord que la condition $a \geq b$ entraîne que $u_n \geq 0$ pour tout $n \geq 0$. Ceci étant, on a pour n assez grand,

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{u_n} &= \left(n^2 + an + 2\right)^{1/2} - \left(n^2 + bn + 1\right)^{1/2} \\
&= n\left(1 + \frac{a}{n} + \frac{2}{n^2}\right)^{1/2} - n\left(1 + \frac{b}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} \\
&= \frac{a-b}{2} + \frac{4 - a^2 + b^2}{8n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{a-b}{2}$$

On en déduit que

- Si $\dfrac{a-b}{2} > 1$, la série $\sum u_n$ diverge,
- Si $\dfrac{a-b}{2} < 1$, la série $\sum u_n$ converge,
- Si $\dfrac{a-b}{2} = 1$, alors $\sqrt[n]{u_n} = 1 + \dfrac{2-(a+b)}{4n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$

Dans ce troisième cas on a donc

- si $a+b < 2$ alors $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$ pour n assez grand, donc $u_n \geq 1$ et la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- pour $a + b \geq 2$, on ne peut conclure sous cette forme. En revanche, on a, pour $\alpha > 0$:

$$\begin{aligned}
\ln\left(n^\alpha u_n\right) &= \alpha \ln n + n \ln\left(1 + \frac{2-(a+b)}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \alpha \ln n + 2 - (a+b) + o(1),
\end{aligned}$$

il en résulte que $\lim n^\alpha u_n = +\infty$, et en particulier, $\lim n u_n = +\infty$ d'où la réponse.

Partie 2 - Séries numériques à termes quelconques

Exercice 8
Considérons les séries
$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 1}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$$
Montrer que les termes généraux de ces séries sont équivalents mais que les séries n'ont pas la même nature.

Réponse 8
En développant le log :
$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)\sim\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$
Les termes généraux sont bien équivalents.
On reconnait une série de Riemann alternée avec $\alpha=\frac{1}{2}>0$ donc la première série est convergente.
Pour la seconde série, le développement du log donne
$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)=\frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}-\frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^2+o\left(\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^2\right)=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$
En particulier, on remarque que
$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}=-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\sim-\frac{1}{2n}.$$
où l'on reconnait la série harmonique qui est divergente. On a donc
$$\sum_{n\geq 1}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)=\underbrace{\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{CV}+\underbrace{\sum_{n\geq 1}O\left(\frac{1}{n}\right)}_{DV}$$
et on conclut que la série $\sum_{n\geq 1}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ diverge.

Exercice 9
Étudier les séries:

1. $\sum_{n\geq 1}\left(\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1\right)$
2. $\sum_{n\geq 1}(-1)^n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n}$
3. $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$

Réponse 9

1. On a $\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o\left(x^2\right)$ donc :
$$\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1=\left(1+\frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}-\frac{1}{8}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^2+o\left(\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^2\right)\right)-1=\frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}-\frac{1}{8n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$
d'où :
$$\left(\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1\right)-\frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}=-\frac{1}{8n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\sim-\frac{1}{8n}$$

où $\frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$ est le terme général d'une série de Riemann alternée convergente et $\frac{1}{8n}$ est le terme général d'une série harmonique divergente. On conclut donc que la série $\sum_{n\geq 1}\left(\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1\right)$ diverge.

2. En développant le sinus on a

$$(-1)^n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n} = (-1)^n\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

Où $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est le terme général d'une série de Riemann alternée convergente et $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ est une série absolument convergente puisque c'est une série de Riemann avec $\alpha = \frac{3}{2} > 1$ donc la série $\sum_{n\geq 1} O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ converge. On conclut que la série $\sum_{n\geq 1}(-1)^n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n}$ converge comme somme de deux séries convergentes.

3. En développant $\frac{1}{1+x}$ On a :

$$\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n}\frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{n}} = \frac{(-1)^n}{n}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Où $\frac{(-1)^n}{n}$ est le terme général d'une série de Riemann alternée convergente, et $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ est une série absolument convergente puisque de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$ donc $\sum_{n\geq 1} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge. On en déduit que la série $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$ converge.

Exercice 10
Étudier la convergence de la série numérique de terme général

1. $u_n = (-1)^n\frac{n^3}{n!}$
2. $u_n = \frac{a^n}{n!}, \quad a\in\mathbb{C}$
3. $u_n = na^{n-1}, \quad a\in\mathbb{C}$
4. $u_n = \sin\left(\frac{n^2+1}{n}\pi\right)$
3. $u_n = (-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$
4. $u_n = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Réponse 10

1. On pose $v_n = |u_n| = \frac{n^3}{n!}$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{(n+1)^3}{(n+1)!}}{\frac{n^3}{n!}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^3\times\frac{1}{n+1}\to 0$$

D'après la règle de D'Alembert, la série de terme général v_n converge, donc la série de terme général u_n converge absolument, donc elle converge.

2. On pose $v_n = |u_n| = \frac{|a|^n}{n!}$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|a|^n}{n!}} = \frac{|a|}{n+1}\to 0$$

D'après la règle de D'Alembert, la série de terme général v_n converge, donc la série de terme général u_n converge absolument, donc elle converge.

3. Pour $|a| < 1$ on pose $v_n = |u_n| = n|a|^{n-1}$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1)|a|^n}{n|a|^{n-1}} = \frac{n}{n+1}|a| \to |a|$$

D'après la règle de D'Alembert, la série de terme général v_n converge, donc la série de terme général u_n converge absolument, donc elle converge.
Pour $|a| \geq 1, |u_n| \to +\infty$ donc la série diverge grossièrement.

4. On réécrit
$$u_n = \sin\left(\frac{n^2+1}{n}\pi\right) = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{n}\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$
Il s'agit d'une série alternée car $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \geq 0$, il est à peu près évident que a_n est décroissant et tend vers 0 , d'après le TSSA, la série converge.
Remarque : on pourrait montrer qu'elle semi-convergente.

5. On réécrit
$$u_n = (-1)^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = (-1)^n \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$
$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ est positif, décroissant et tend vers 0 , d'après le TSSA la série converge.

6. Tentons de faire un développement limité en $\frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 1$ donc à l'ordre 2 ou 3/2, dans le premier terme on va perdre un ordre à cause du n devant le ln et dans la cos la variable sera $1/\sqrt{n}$
$$\begin{aligned}
u_n &= n\ln(1+\frac{1}{n}) - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\
&= n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \left(1 - \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^4}{4!} + o\left(\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^4\right)\right) \\
&= 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{7}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{7}{24n^2}
\end{aligned}$$
Il s'agit du terme général d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 2 > 1$ donc la série de terme général u_n converge.

Exercice 11
On considère la série :
$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

1. Montrer que la série est convergente.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$:
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$
3. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n+2}$$
4. En déduire que :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2$$

5. Donner une valeur approchée de $\ln 2$ à la précision 10^{-3}.

Réponse 11

1. La série $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ est alternée, or la suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante de limite nulle donc, d'après le critère spécial des séries alternées, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ est convergente.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} - (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t} - (-1)^{n+1}\frac{t^{n+1}}{1+t}\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{1-(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Or

$$\forall t \in [0,1], 1-(-t)^{n+1} = (1-(-t))\sum_{k=0}^{n}(-t)^k = (1+t)\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k$$

donc $\forall t \in [0,1]$, $\dfrac{1-(-t)^{n+1}}{1+t} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k$. On en déduit

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} - (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k\right)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1 t^k\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}.\end{aligned}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\forall t \in [0,1], 0 \leq \frac{t^{n+1}}{1+t} \leq t^{n+1}$$

donc :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^{n+1}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 = \frac{1}{n+2}$$

4. On a :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n+2} \to 0$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = 0.$$

D'autre part :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln 2$$

Or :

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} - (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \ln 2 - (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

donc, par passage à la limite :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2$$

5. La série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ est alternée, or la suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)$ est décroissante de limite nulle donc, d'après la majoration du reste dans le TSSA :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}\right| \leq \frac{1}{n+2}$$

On peut écrire le reste de la série sous la forme

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| \ln 2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \right| \leq \frac{1}{n+2}$$

On déduit que pour que $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$ soit une valeur approchée de $\ln 2$ à la précision 10^{-3} il est suffisant que :

$$\left| \ln 2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \right| \leq 10^{-3}$$

donc, il suffit que :

$$\frac{1}{n+2} \leq 10^{-3}.$$

On peut donc prendre $n \geq 10^3 - 2 = 998$, par exemple $n = 998$.

Exercice 12
Montrer la convergence et calculer les sommes des séries de terme général

1. $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!k!}$
2. $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!2^{n-k}}$

Réponse 12

1. On pose $v_n = \frac{1}{n!}$, il s'agit d'une série absolument convergente en appliquant la règle de D'Alembert

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{n+1} \to 0 < 1$$

On peut appliquer la formule du produit de deux séries absolument convergentes

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} v_{n-k}v_k\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!k!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

On reconnait la série exponentielle avec $x = 1$ donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$$

Ce qui montre que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n-k)!k!} = e^2$$

2. On pose

$$a_n = \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$$

a_n est le terme général d'une série absolument convergente en appliquant la règle de D'Alembert

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{n+1} \to 0 < 1$$

$|b_n| = \dfrac{1}{2^n}$ est le terme général d'une série géométrique convergente avec $q = \frac{1}{2} < 1$, donc la série de terme général b_n converge absolument. On peut appliquer la formule du produit de deux séries absolument convergentes

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} b_{n-k}a_k\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!2^{n-k}}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Où $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = e$ et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}$$

On conclut

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-k}}{k!2^{n-k}} = \frac{2e}{3}.$$