# 1 | Distributions continues

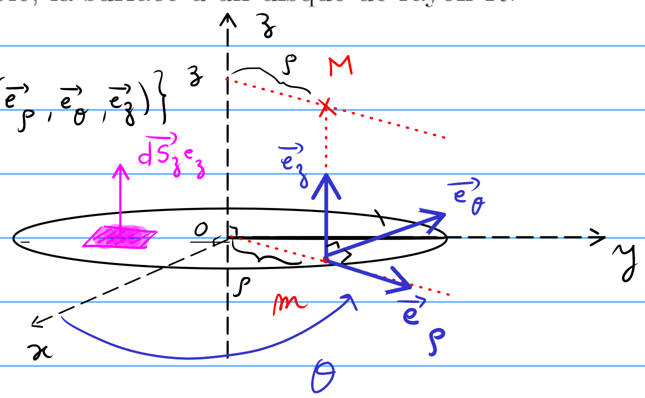
## Applications de cours

**Exercice 1** – Calculs d'aire et de volume

En choisissant le système de coordonnées approprié :

1/ Calculer, en utilisant une intégrale double, la surface d'un disque de rayon $R$.

coordonnées cylindriques : $\{O; (\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)\}$




- $\vec{OM} = \vec{Om} + \vec{mM}$

$$\boxed{\vec{OM} = \rho\,\vec{e_\rho} + z\,\vec{e_z}}$$

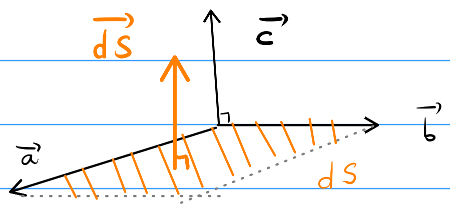
fixe

$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$

l'aire orange vaut :

$$\|\vec{a} \wedge \vec{b}\| = \|\vec{c}\| = \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\,\underbrace{|\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})|}_{=1 \text{ pour B.O.N.D}}$$

$|(\widehat{\vec{a},\vec{b}})| = \frac{\pi}{2}$



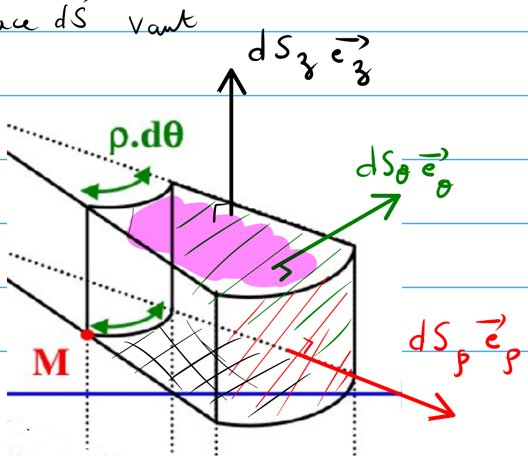

déplacement élémentaire : $\vec{OM} = \begin{vmatrix} \rho & (\vec{e_\rho}) \\ 0 & (\vec{e_\theta}) \\ z & (\vec{e_z}) \end{vmatrix}$ Varie avec M

$$d\vec{OM} = \begin{vmatrix} d\rho & (\vec{e_\rho}) \\ \rho\, d\theta & (\vec{e_\theta}) \\ dz & (\vec{e_z}) \end{vmatrix}$$

$dS_z$ ; $dS_\theta$ ; $dS_\rho$

$\xrightarrow{\text{donc}}$ vecteur surface $\vec{dS}$ vaut

$$\vec{dS} = \begin{vmatrix} \bullet\ dS_\rho = (\rho\, d\theta)\, dz \\ \bullet\ dS_\theta = dz\, d\rho \\ \bullet\ dS_z = \rho\, d\theta\, d\rho \end{vmatrix}$$



$\rho, \theta, z$ variables séparables

• surface du disque de rayon $R$ :

$$S = \iint_{\text{disque}} dS_z = \int_{\rho=0}^{R} \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\rho \, d\theta \, d\rho\right) = \left(\int_0^R \rho \, d\rho\right) \left(\int_0^{2\pi} 1 \, d\theta\right)$$

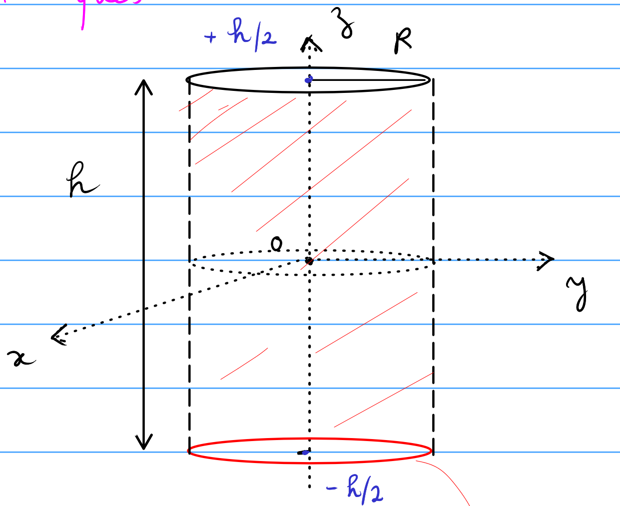
$$\Rightarrow \quad S = \left[\frac{1}{2}\rho^2\right]_0^R \left[\theta\right]_0^{2\pi} = \left(\frac{R^2}{2} - 0\right)\left(2\pi - 0\right) = \pi R^2$$

2/ Calculer, en utilisant une intégrale double, la surface de la paroi latérale d'un cylindre de hauteur $h$ et de rayon $R$.

coordonnées cylindriques

$$S = \iint_{\substack{\text{surface}\\ \text{latérale}}} dS_\rho = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=-h/2}^{h/2} \rho \, d\theta \, dz$$

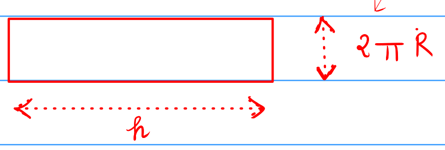
$\rho = R$ fixé




$$S = R \left(\int_{\theta=0}^{2\pi} 1 \, d\theta\right) \left(\int_{z=-h/2}^{h/2} 1 \, dz\right)$$

$$S = R \left[\theta\right]_0^{2\pi} \left[z\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = R\left(2\pi - 0\right)\underbrace{\left(\frac{h}{2} - \left(-\frac{h}{2}\right)\right)}_{h}$$

surface latérale $S = (2\pi R)\, h$




3/ Calculer, en utilisant une intégrale triple, le volume d'un cylindre de hauteur $h$ et de rayon $R \overset{?}{=} \pi R^2 h$

coordonnées cylindriques

$$d\overrightarrow{OM} = \begin{vmatrix} d\rho \\ \rho \, d\theta \\ dz \end{vmatrix} \longrightarrow$$ volume élémentaire $dV$ vaut : $dV = d\rho \, (\rho \, d\theta)\, (dz)$

$$= (\rho \, d\rho)\,(d\theta)\, dz$$

volume du cylindre :

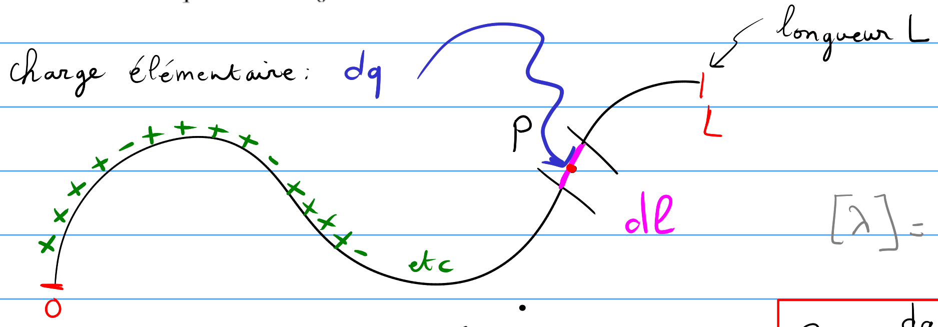
$$V = \iiint_{\text{cylindre}} dV = \int_{\rho=0}^{R} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\rho \, d\rho)\, d\theta \, (dz)$$

$$V = \overbrace{\left(\int_0^R \rho \, d\rho\right)}^{\frac{R^2}{2}} \overbrace{\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)}^{2\pi} \overbrace{\left(\int_{-h/2}^{h/2} dz\right)}^{h} = \overbrace{\left(\pi R^2\right)}^{\text{surface de la base}} h$$

## Exercice 2 – Calculs de charge totale

En choisissant le système de coordonnées approprié :

1/ Calculer la charge totale contenue dans un fil de longueur $L$ uniformément chargé dont la densité linéique vaut $\lambda_0$.




$$[\lambda] = \frac{I\,T}{L} = I\,T\,L^{-1}$$

par définition, densité linéique de charge : $\boxed{\lambda = \frac{dq}{d\ell}} = \lambda(P)$

C

m

$C.m^{-1}$

ici fil uniformément chargé : $\lambda = \lambda_0$ constant.

charge totale : $Q = \int_{\text{fil}} dq = \int_0^L \lambda \, d\ell = \lambda_0 \int_0^L d\ell = \lambda_0 L$

$\lambda = \lambda_0$

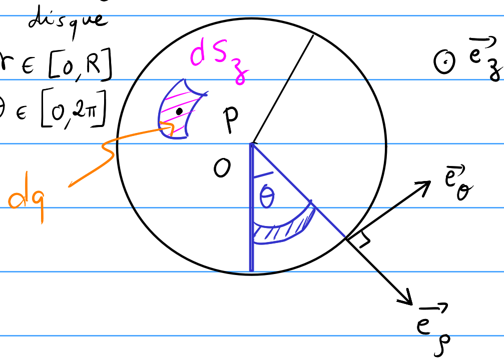
2/ Calculer la charge totale contenue dans un disque de rayon $R$ uniformément chargé en surface dont la densité surfacique vaut $\sigma_0$.

charge totale : $Q = \iint_{\text{disque}} dq = \iint_{\text{disque}} \sigma \, dS_z$

$\sigma = \sigma_0$ cst

$r \in [0, R]$

$\theta \in [0, 2\pi]$




or $\boxed{\sigma \triangleq \frac{dq}{dS}} \overset{\text{ici}}{=} \sigma_0$ constant

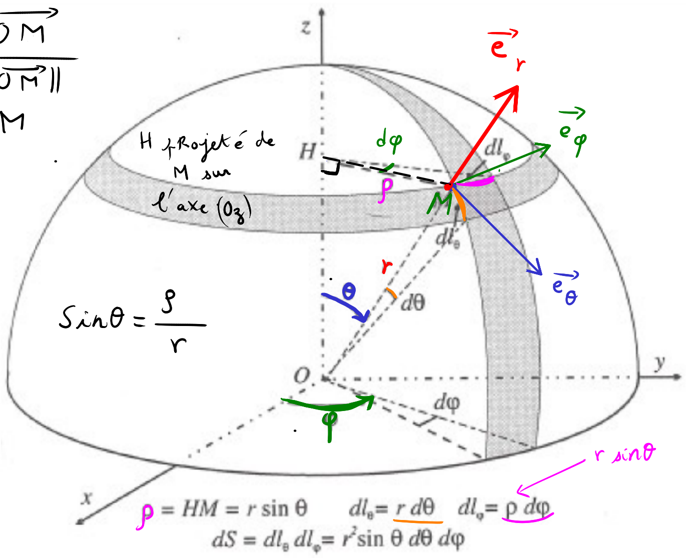
$$Q = \sigma_0 \iint_{\text{disque}} dS_z = \sigma_0 \pi R^2$$

3/ Calculer la charge totale contenue dans une boule de rayon $R$ uniformément chargée en volume dont la densité volumique vaut $\rho_0$.

coordonnées sphériques $\{O, (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)\}$ — fixe

$$\overrightarrow{OM} = r.\vec{e}_r \quad , \quad \vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$$

↳ distance de O à M




élément différentiel : $\vec{dl} = \overrightarrow{MM'}$

M' ∞ proche de M

$$d\overrightarrow{OM} = \vec{dl} = \begin{cases} dl_r = dr & (\vec{e}_r) \\ dl_\theta = r\,d\theta & (\vec{e}_\theta) \\ dl_\varphi = r\sin\theta\,d\varphi & (\vec{e}_\varphi) \end{cases}$$

Vecteur surface : $\vec{dS}$

$$\vec{dS} = \begin{cases} dS_r = dl_\theta\,dl_\varphi = r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi & (\vec{e}_r) \\ dS_\theta = dl_r\,dl_\varphi = r\,dr\sin\theta\,d\varphi & (\vec{e}_\theta) \\ dS_\varphi = dl_\theta\,dl_r = r\,dr\,d\theta & (\vec{e}_\varphi) \end{cases}$$

avec $\theta \in [0, \pi]$ et $\varphi \in [0, 2\pi]$

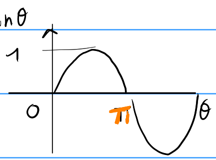
volume élémentaire : $dV = dl_r\,dl_\theta\,dl_\varphi$

$$= (r^2\,dr)\,(\sin\theta\,d\theta)\,d\varphi$$

variables séparables

$$\frac{d\cos\theta}{d\theta} = -\sin\theta$$

$$V = \iiint_{\text{Sphère}} dV = \int_0^R (r^2\,dr)\int_{\theta=0}^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi = \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R \left[-\cos\theta\right]_0^\pi \left[\varphi\right]_0^{2\pi}$$




$$= \left(\frac{R^3}{3} - 0\right) \times \underbrace{-(\cos\pi - \cos 0)}_{\underbrace{-((-1)-1)}_{=2}}\,(2\pi - 0)$$

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

$\rho(P) = \rho_0$ constant

boule uniformément chargée en volume.

↳ densité volumique de charge :

$$\boxed{\rho(P) \hat{=} \frac{dq}{dV}}$$

$C$ ; $m^3$ ; $C.m^{-3}$

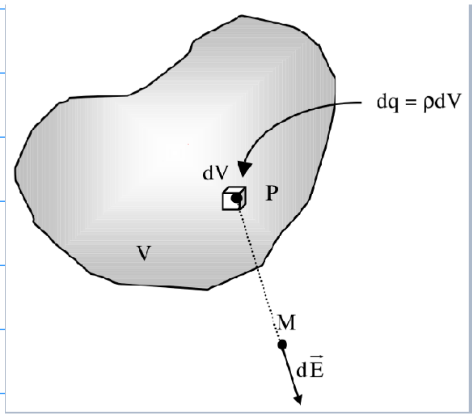
charge totale dans la sphère chargée :

$$Q = \iiint_{\text{sphère}} dq = \iiint_{\text{sphère}} \rho(P)\, dV$$

$\rho(P) = \rho_0$

$$Q = \rho_0 \iiint_{\text{sphère}} dV = \rho_0 V_{\text{sphère}} = \underbrace{\frac{4}{3}\pi R^3}_{m^3}\, \rho_0$$

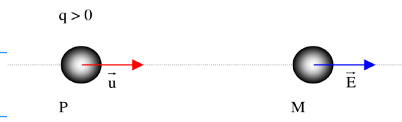
$C$ ; $C.m^{-3}$




remarque : ⚠ homogénéité d'un champ électrique. ⚠

loi de Coulomb :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}$$




. $\|\vec{u}\| = 1$, $[\|\vec{u}\|] = 1$ . $[r^2]$ $L^2$

. $[4\pi] = 1$ et $E = \|\vec{E}\|$

donc

$$[E] = \left[\frac{q}{\varepsilon_0 r^2}\right] = \frac{[q]}{[\varepsilon_0]\, L^2}$$

# Exercices

**Exercice 3** – Charge totale d'une distribution surfacique

On considère une sphère de centre $O$ et de rayon $R$ portant en sa surface une densité de charges

$$\boxed{\sigma = \sigma_0(1 + \cos\theta)} = \sigma(\theta)$$

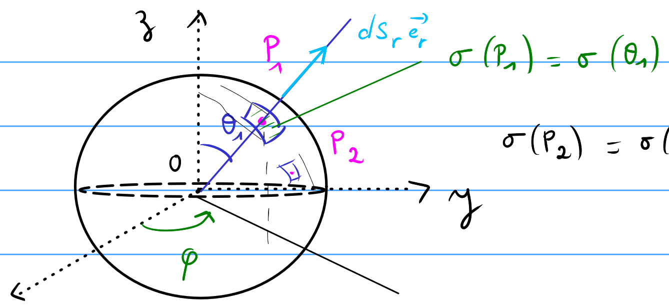
où $\theta = (\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{OP})$.

Calculer la charge totale portée par la distribution.

. Coordonnées sphérique

Charge totale portée par la distribution surfacique :

$$Q \hat{=} \iint_{P \in S} dq = \iint_{P \in S} \sigma(\theta)\, dS_r \qquad \text{avec} \quad \sigma(\theta) = \frac{dq}{dS_r}$$




$$\sigma(P_2) = \sigma(\theta_2) \neq \sigma(\theta_1)$$

$$Q = \iint_{\text{Sphère}} \sigma(\theta)\, dS_r \qquad \text{avec :} \quad d\vec{OM} = \begin{vmatrix} dr & (\vec{e}_r) \\ r\, d\theta & (\vec{e}_\theta) \\ r \sin\theta\, d\varphi & (\vec{e}_\varphi) \end{vmatrix}$$

$$\text{donc} \quad d\vec{S} = \begin{vmatrix} \cdot\ r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi & (\vec{e}_r) \\ \cdot\ r\, dr \sin\theta\, d\varphi & (\vec{e}_\theta) \\ \cdot\ r\, dr\, d\theta & (\vec{e}_\varphi) \end{vmatrix}$$

$\sigma_0$ constante

$$Q = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\sigma_0 [1 + \cos\theta]\right) r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$r = R$ constante
sphère chargée à sa surface

$$Q = \sigma_0 R^2 \underbrace{\left( \int_{\theta=0}^{\pi} [1 + \cos\theta] \sin\theta\, d\theta \right)}_{I_\theta} \underbrace{\left( \int_{\varphi=0}^{2\pi} 1 \times d\varphi \right)}_{[\varphi]_0^{2\pi} = 2\pi}$$

$$I_\theta = \left( \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta\, d\theta \right) + \left( \int_{\theta=0}^{\pi} \cos\theta \sin\theta\, d\theta \right)$$

$u = \cos\theta$
$du = -\sin\theta\, d\theta$

$$= \underbrace{\left[ -\cos\theta \right]_{\theta=0}^{\pi}}_{-(-1)-(-1) = 2} + \underbrace{- \int_{1}^{-1} u\, du}_{\int_{-1}^{1} u\, du = \left[\frac{u^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0}$$

$$I_\theta = \int_{\theta=0}^{\pi} (1+\cos\theta)\sin\theta\, d\theta = -\int_{u=1}^{u=-1} (1+u)\, du = -\left[u+\frac{u^2}{2}\right]_1^{-1}$$

$\int$ $\qquad$ $\frac{d}{du}$

on pose : $\boxed{u=\cos\theta} \longrightarrow \frac{du}{d\theta} = \frac{d\cos\theta}{d\theta} = -\sin\theta$

$\Rightarrow du = -\sin\theta\, d\theta$ ☺

$$I_\theta = -\left[\left(-1+\frac{1}{2}\right)-\left(1+\frac{1}{2}\right)\right] = -\left(-2+0\right) = 2$$

conclusion : $Q = \sigma_0 R^2 \; I_\theta \times 2\pi = 4\pi R^2 \sigma_0$

$Q$ : C $\qquad \sigma_0$ : C.m$^{-2}$ $\qquad R^2$ : m$^2$

même résultat que pour $\sigma(\theta) = \sigma_0$ constant car $\int_{\theta=0}^{\pi} \cos\theta \sin\theta\, d\theta = 0$

---

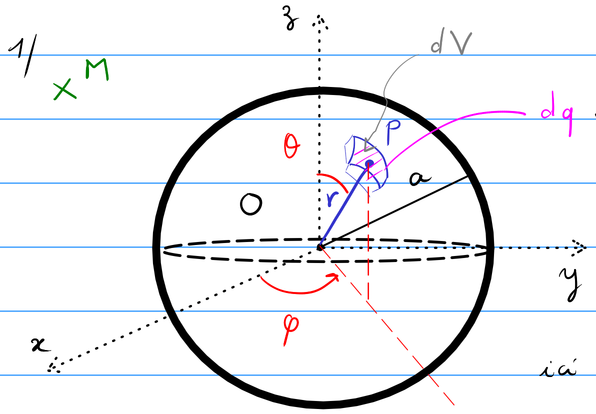
**Exercice 4** – Noyaux atomiques *

Du point de vue du potentiel et du champ électrique qu'ils créent, les noyaux de certains atomes légers peuvent être modélisés par une distribution volumique de charge à l'intérieur d'une sphère de centre $O$ et de rayon $a$. On désigne par $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$, le vecteur position d'un point $P$ quelconque de l'espace. Pour $r < a$, la charge volumique $\rho(P)$ qui représente le noyau varie en fonction de $r$ suivant la loi :

à l'intérieur

$$\rho(r) = \rho_0\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) = \frac{dq}{dV}$$

où $\rho_0$ est une constante positive.




dq : $dq = \rho(P)\, dV$ en P

densité volumique de charges : $\rho(P) \hat{=} \frac{dq}{dV}$

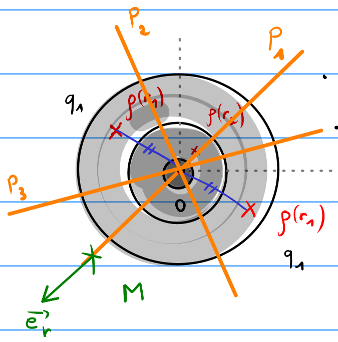
ici $\boxed{\rho(P) = \rho_0\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)}$

0 choix du système de coordonnées : coordonnées sphériques

champ électrique $\vec{E}$ s'écrit : $\vec{E} = \vec{E}(r,\theta,\varphi)$ dû aux charges en chaque point P.

① **invariances :** $\rho(P)$ distribution de charges ne dépend pas de $\theta$ et $\varphi$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{E}(r, \cancel{\theta}, \cancel{\varphi}) = \vec{E}(r)}$

② **symétrie :**




• $r_1 > r_2$ : $\rho(r_1) < \rho(r_2)$

• $\rho(\vec{r}) = \rho(-\vec{r})$

$\boxed{\text{tout plan } P \text{ passant par le centre } O \text{ est plan de symétrie}}$

$\vec{E} \in P_1$, $\vec{E} \in P_2$ etc...

donc $\vec{E} = \vec{E}(r) = E(r)\,\vec{e}_r$ , $E(r)$ décroît avec $r$

2/ **Charge totale Q :** volumique $\rho(r<a) = \rho_0\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)$

$$Q = \int_{r=0}^{a}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho \, dV = \int_{r=0}^{a}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho(r) \; r^2 dr \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$Q = \left(\int_{r=0}^{a} \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) r^2 \, dr\right) \underbrace{\left(\int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta\right)}_{2} \underbrace{\left(\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi\right)}_{2\pi}$$

cst

$$Q = \frac{8\pi\rho_0 a^3}{15} \; ?$$

$r > a$ : $\rho(r) = 0$ pas de charges (vide)

$$I_r = \int_{r=0}^{a} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) r^2 \, dr = \int_{r=0}^{a} \left(r^2 - \frac{r^4}{a^2}\right) dr$$

$$= \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5a^2}\right]_0^a = \left(\frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{5}\right) = a^3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{2a^3}{15}$$

donc $\boxed{Q} = \rho_0 I_r \, 4\pi = \boxed{\frac{8\pi\rho_0 a^3}{15}}$

C ; $C\,m^{-3}$ ; $m^3$

$\rho \hat{=} \frac{dq}{dV}$ , $[Q] = [\rho] L^3$