
Rappels

Exercice 1. Montrer les inégalités suivantes.

1. $\forall x \in]0, \infty[, x + \frac{1}{x} \geq 2.$
 2. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$
 3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx.$
 4. $\forall x \in \mathbb{R}, 0 < \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 + 2x + 2} \leq 3.$
-

A faire chez soi

Exercice 2. 1. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2.$

2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 3}.$ Sans étudier les variations de f , trouver le minimum de f sur $\mathbb{R}.$

Exercice 3. Soient x, y, z trois réels tels que : $0 < a \leq x \leq b, d \leq y \leq c < 0, 0 < e \leq z \leq f.$
Déterminer un encadrement de :

1. $4x - 2y$
2. $\frac{x-y}{z}$

Exercice 4. Calculer le domaine de définition de la fonction $x \mapsto \sqrt{\frac{\ln|x|}{x}}.$

Exercice 5. Soient a et x des nombres réels. Supposons que a est non nul et que l'on a $|x - a| < |a|.$ Montrer que x est non nul et que x est de même signe que $a.$

Exercice 6. Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

1. $|x + 1| < 0.1.$
2. $|x - 2| > 10.$
3. $|x| < |x + 1|.$

4. $|2x - 1| < |x - 1|$.
5. $||x + 3| - 1| \leq 2$.
6. $\frac{x - 1}{x + 2} \geq 3$.
7. $\sqrt{x - 3} - \sqrt{2x + 1} \leq 4$.
8. $\sqrt{x^2 - 2x + 3} \leq x - 1$.

Exercice 7. Calculer la valeur de :

1. $\sum_{i=1}^n 2$.

2. $\prod_{i=1}^n 3$.

3. $\sum_{k=1}^n (2a_{k+1} - 3a_k + a_{k-1})$.

4. $\sum_{k=1}^n k$.

5. $\sum_{k=2}^n 3^{2k}$.

6. En remarquant que $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$, montrer que : $\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = \sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$.

7. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^n (k+1)^3 - \sum_{k=0}^n k^3 = 3 \sum_{k=0}^n k^2 + \frac{(n+1)(3n+2)}{2}.$$

En déduire $\sum_{k=0}^n k^2$.

Exercice 8. Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=1}^n 5^k \binom{n}{k}$.

2. $\sum_{k=0}^{n-1} (-3)^k \binom{n}{k}$.

3. $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$.

Exercice 9. Ecrire à l'aide de factorielles les expressions suivantes :

1. $\prod_{k=1}^n k^2$.

$$2. \prod_{k=2}^n (2k+1).$$

$$3. \prod_{k=3}^{n-1} k.$$

Exercice 10. Calculer les produits suivants :

$$1. \prod_{k=0}^n 3^k.$$

$$2. \prod_{k=0}^n e^{-k}.$$

$$3. \prod_{k=2}^n \frac{k}{k+2}.$$

Pour aller plus loin

Exercice 11. Soit $p \in \mathbb{N}^\times$ et $n \in \mathbb{N}^\times$ tels que $p < n$. Montrer que

$$\binom{n}{p+1} = \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \dots + \binom{n-1}{p}.$$

Exercice 12. A partir des formules ($\sin(x+y) = \dots$), ($\cos(x+y) = \dots$) et ($\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$), démontrer les formules suivantes :

$$1. \sin(x) + \sin(y) = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

$$2. \cos(x) - \cos(y) = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

$$3. \tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}.$$

$$4. \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \text{ et } \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \text{ où } t = \tan\left(\frac{x}{2}\right).$$

Exercice 13. Calculer $\cos \frac{\pi}{12}$, $\sin \frac{\pi}{12}$ et $\tan \frac{\pi}{12}$.

Exercice 14. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$1. \sin(x) + \sin(2x) = 0.$$

$$2. \cos(x) = \sqrt{3} \sin(x).$$

$$3. \tan(2x) = 3 \tan(x).$$