CY Tech

TD Analyse

Inégalités, Sigma et Fonctions Trigonometriques.

Exercice 1

Montrer les inégalités suivantes.

1. $\forall x \in]0, +\infty[, x + \frac{1}{x} \geq 2.$

   Solution : On commence par noter que

$$\begin{aligned} \forall x \in]0,+\infty[,\ (x-1)^2 \geq 0 \quad &\Longrightarrow \quad \forall x \in]0,+\infty[,\ x^2 - 2x + 1 \geq 0 \\ &\Longrightarrow \quad \forall x \in]0,+\infty[,\ x^2 + 1 \geq 2x \\ &\underbrace{\Longrightarrow}_{\times \frac{1}{x}} \quad \forall x \in]0,+\infty[,\quad x + \frac{1}{x} \geq 2. \end{aligned}$$

2. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, xy \leq \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right).$

   Solution : Comme pour la question précédente, on commence par remarquer que

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ 0 \leq (x-y)^2 \quad &\Longrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ 0 \leq x^2 - 2xy + y^2 \\ &\Longrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ 2xy \leq x^2 + y^2 \\ &\Longrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Exercice 1

3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx.$

   Solution : D'après le point (2.), pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $y \in \mathbb{R}$, pour tout $z \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{array}{rcl} xy & \leq & \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) \\ xz & \leq & \frac{1}{2}\left(x^2 + z^2\right) \\ yz & \leq & \frac{1}{2}\left(y^2 + z^2\right). \end{array}$$

   En additionnant les trois inégalités, on obtient

$$\begin{array}{rcl} xy + yz + zx & \leq & \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 + z^2\right) + \frac{1}{2}\left(y^2 + z^2\right) \\ & \leq & x^2 + y^2 + z^2. \end{array}$$

Exercice 1

4. Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 < \frac{x^2+2x+4}{x^2+2x+2} \leq 3.$$

Solution : Commençons par montrer que $\frac{x^2+2x+4}{x^2+2x+2} > 0$. Pour cela étudions le signe du numérateur et celui du dénominateur. Pour le dénominateur, le discriminant est

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4.$$

Le dénominateur n'a pas de racine et garde donc partout le signe de a, c-à-d pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons

$$x^2 + 2x + 2 > 0.$$

De même, le discriminant du numérateur est donné par

$$\Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -12$$

alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons

$$x^2 + 2x + 4 > 0.$$

D'où on obtient que le rapport est strictement positif :

$$0 < \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 + 2x + 2}.$$

Deuxième méthode : Notons que

$$\begin{array}{rcl} x^2 + 2x + 4 & = & (x+1)^2 + 3 \ \geq \ 3 \ > \ 0 \\ x^2 + 2x + 2 & = & (x+1)^2 + 1 \ \geq \ 1 \ > \ 0. \end{array}$$

Si on prend le quotient entre la première et la deuxieme inéquation, on conclut

$$\frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 + 2x + 2} \ > \ 0.$$

Exercice 1

Pour montrer la deuxième inégalité, il suffit de noter que pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+2x+4}{x^2+2x+2} \leq 3 \quad &\iff \quad x^2+2x+4 \leq 3(x^2+2x+2) \\
&\iff \quad x^2+2x+4 \leq 3x^2+6x+6 \\
&\iff \quad 0 \leq 2x^2+4x+2 \\
&\iff \quad 0 \leq 2(x^2+2x+1) = 2(x+1)^2.
\end{aligned}$$

La dernière proposition étant vraie, la première l'est également.

Exercice 1

Deuxième méthode : Pour montrer

$$\frac{x^2+2x+4}{x^2+2x+2} \leq 3$$

On passe tout à gauche et on essaie de montrer que l'expression est négative :

$$\begin{aligned} \frac{x^2+2x+4}{x^2+2x+2} - 3 &= \frac{x^2+2x+4}{x^2+2x+2} - 3\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+2} \\ &= \frac{x^2+2x+4-3(x^2+2x+2)}{x^2+2x+2} \\ &= \frac{x^2+2x+4-3x^2-6x-6}{x^2+2x+2} \\ &= \frac{-2x^2-4x-2}{x^2+2x+2}. \end{aligned}$$

Il ne nous reste qu'à déterminer le signe du numérateur :

$$\Delta = (-4)^2 - 4(-2)(-2) = 16 - 16 = 0$$

Donc le numérateur garde le même signe, celui de $a = -2 < 0$. Par conséquent le numérateur est négatif, et le rapport est négatif également.

Exercice 1

Ainsi

$$\frac{x^2+2x+4}{x^2+2x+2}-3 \;\leq\; 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x^2+2x+4}{x^2+2x+2} \;\leq\; 3.$$

À faire chez soi - Exercice 2

1. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$.

Solution : Même idée, on commence par noter que

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ 0 \leq (x-y)^2 \quad & \Longrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ 0 \leq x^2 - 2xy + y^2 \\
& \Longrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ 2xy \leq x^2 + y^2 \\
& \Longrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ 4xy \leq x^2 + 2xy + y^2 \\
& \Longrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ 4xy \leq (x+y)^2 \\
& \Longrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} \\
& \Longrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2.
\end{aligned}$$

À faire chez soi - Exercice 2

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par
$$x \mapsto \frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3}.$$
Sans étudier les variations de f, trouver le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

Solution : Pour trouver le minimum de f on commence par noter que
$$x^2+2x+3 = (x+1)^2+2 \geq 2.$$
D'où
$$\frac{1}{2} \geq \frac{1}{x^2+2x+3}.$$
Maintenant
$$\begin{aligned} \frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3} &= \frac{x^2+2x+3-1}{x^2+2x+3} \\ &= \frac{x^2+2x+3}{x^2+2x+3} - \frac{1}{x^2+2x+3} \\ &= 1 - \frac{1}{x^2+2x+3} \\ &\geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

À faire chez soi - Exercice 2

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$ nous avons

$$f(x) \geq \frac{1}{2}. \tag{1}$$

Notons de plus que

$$f(-1) = \frac{1}{2}.$$

Le minimum de f est donc $\frac{1}{2}$.

À faire chez soi - Exercice 3

Soient $x, \ y, \ z$ trois réels tels que :

$$\begin{aligned} 0 < a \leq x \leq b, \\ d \leq y \leq c < 0, \\ 0 < e \leq z \leq f. \end{aligned}$$

Déterminer un encadrement de :

$$4x - 2y$$

Solution : En multipliant par 4 l'inégalité $0 < a \leq x \leq b$, on obtient

$$0 < 4a \leq 4x \leq 4b,$$

et en multipliant par -2 l'inégalité $d \leq y \leq c < 0$, on conclut

$$0 < -2c \leq -2y \leq -2d.$$

Finalement, en additionnant les deux inégalités, on déduit

$$4a - 2c \leq 4x - 2y \leq 4b - 2d.$$

À faire chez soi - Exercice 3

Déterminer un encadrement de :

$$\frac{x-y}{z}.$$

Solution : On a

$$0 < a \leq x \leq b, \tag{2}$$

et en multipliant par -1 l'inégalité $d \leq y \leq c < 0$, on obtient

$$0 < -c \leq -y \leq -d. \tag{3}$$

En additionnant l'inégalité (2) avec l'inégalité (3), on déduit

$$0 < a - c \leq x - y \leq b - d. \tag{4}$$

Maintenat,

$$0 < e \leq z \leq f.$$

Donc

$$0 < \frac{1}{f} \leq \frac{1}{z} \leq \frac{1}{e}. \tag{5}$$

Finalement, en multipliant l'inégalité (4) avec l'inégalité (5) on conclut

$$0 < \frac{a-c}{f} \leq \frac{x-y}{z} \leq \frac{b-d}{e}.$$

À faire chez soi - Exercice 3

Remarque :

$$1 \leq x \leq 3 \quad \text{et} \quad -2 \leq y \leq -1$$

n'implique pas que

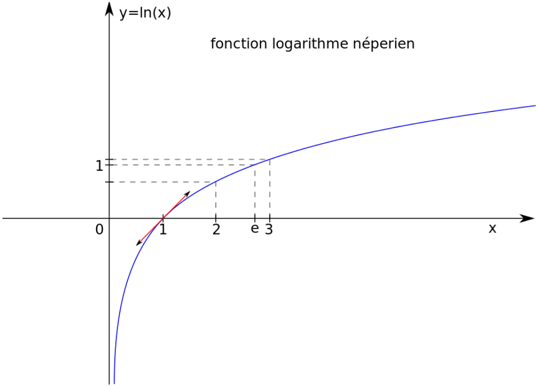
$$-2 \leq xy \leq -3.$$

À faire chez soi - Exercice 4

Calculer le domaine de définition de la fonction

$$x \mapsto \sqrt{\frac{\ln|x|}{x}}.$$

On rappelle que la curve de la fonction $\ln(x)$ est :



Solution : La fonction

- $x \longmapsto \ln|x|$ est bien définie si et seulement si $x \neq 0$.
- $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est bien définie si et seulement si $x \neq 0$.

D'où on conclut que la fonction

$$x \ \longmapsto \ \frac{\ln|x|}{x}$$

a par domaine de définition, l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. En suite, comme

$$x \mapsto \sqrt{x},$$

a par domaine de définition $\mathbb{R}_+$, on déduit que

$$\sqrt{\frac{\ln|x|}{x}} \quad \text{est bien définié} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\ln(|x|)}{x} \geq 0.$$

À faire chez soi - Exercice 4

On rappelle que

$$\ln|x| \geq 0 \quad \text{si et seulement si} \quad |x| \geq 1.$$

Donc

- Pour tout $x \geq 1$
$$\frac{\ln(|x|)}{x} \geq 0.$$
- Pour tout $0 < x \leq 1$
$$\frac{\ln(|x|)}{x} \leq 0.$$
- Pour tout $-1 \leq x < 0$
$$\frac{\ln(|x|)}{x} \geq 0.$$
- Pour tout $x \leq -1$
$$\frac{\ln(|x|)}{x} \leq 0.$$

À faire chez soi - Exercice 4

Par conséquent le domaine de définition de $\sqrt{\frac{\ln|x|}{x}}$ est

$$[-1, 0[\cup [1, +\infty[.$$

Exercice 5

Soient a et x des nombres réels. Supposons que a est non nul et que l'on a

$$|x - a| < |a|.$$

Montrer que x est non nul et que x est de même signe que a.

Solution : En utilisant la définition de la valeur absolue, l'inéquation $|x - a| < |a|$, peut être réécrit sous la forme

$$-|a| < x - a < |a|. \tag{6}$$

On a deux cas à étudier :

- Si $a > 0$, alors l'inégalité (6) devient

  $$-a < x - a < a.$$

  D'où

  $$0 < x < 2a \quad \Longrightarrow \quad x \text{ est non nul et positif (même signe que } a\text{).}$$

- Si $a < 0$, alors l'inégalité (6) devient

  $$a < x - a < -a.$$

  D'où

  $$2a < x < 0 \quad \Longrightarrow \quad x \text{ est non nul et negatif (même signe que } a\text{).}$$

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$|x+1| < 0.1$$

Solution : En utilisant la définition de la valeur absolue, l'inéquation $|x+1| < 0.1$, peut être réécrit sous la forme

$$-0.1 < (x+1) < 0.1,$$

ce qui est equivalent à

$$-1.1 = -0.1 - 1 < x < 0.1 - 1 = -0.9.$$

Par conséquent

$$|x+1| < 0.1 \iff -1.1 < x < -0.9.$$

L'inéquation a donc par ensemble solution, l'intervalle

$$]-1.1, -0.9[.$$

Exercice 6

$$|x-2| > 10$$

Solution : On a deux cas à étudier :

- Si $x-2 \geq 0$, c'est-à-dire si $x \geq 2$, alors l'inégalité $|x-2| > 10$ devient

  $$x-2 > 10 \quad \Longrightarrow \quad x > 12.$$

  C'est-à-dire, dans l'intervalle $[2, +\infty[$, l'inéquation a par ensemble solution l'intervalle

  $$]12, +\infty[.$$

- Si $x-2 < 0$, c'est-à-dire si $x < 2$, alors l'inégalité $|x-2| > 10$ devient

  $$\begin{aligned} -(x-2) > 10 \quad &\Longleftrightarrow \quad -x+2 > 10 \\ &\Longleftrightarrow \quad -x > 8 \\ &\Longleftrightarrow \quad x < -8. \end{aligned}$$

  C'est-à-dire, dans l'intervalle $]-\infty, 2[$ l'inéquation a par ensemble solution, l'intervalle

  $$]-\infty, -8[.$$

L'inéquation a donc par ensemble solution, l'ensemble $]-\infty, -8[\, \cup\,]12, +\infty[$.

Exercice 6

$$|x| < |x+1|$$

Solution : En utilisant la définition de la valeur absolue, l'inéquation $|x| < |x+1|$ peut être réécrit sous la forme

$$-|x+1| < x < |x+1|. \tag{7}$$

On a donc deux cas à étudier

- Si $x \geq -1$, alors l'inégalité (7) devient

  $$-x-1 < x < x+1$$

  d'où on obtient

  $$-1 < 2x < 2x+1 \overset{\cdot\frac{1}{2}}{\Longrightarrow} -\frac{1}{2} < x < x + \frac{1}{2} \Longrightarrow -\frac{1}{2} < x.$$

  C'est-à-dire, dans l'intervalle $[-1, +\infty[$, l'inéquation a par ensemble solution l'intervalle $]-1/2, +\infty[$.
- Si $x < -1$, alors $x < -1 < 0$ et $x+1 < 0$. Donc

  $$|x| < |x+1| \quad \Longrightarrow \quad -x < -x-1 \quad \Longrightarrow \quad 0 < -1.$$

  Contradiction !! Par conséquent, sur l'intervalle $]-\infty, -1[$ l'inéquation n'a pas de solution.

Exercice 6

L'inéquation a donc par ensemble solution, l'intervalle

$$\left] -\frac{1}{2} \ , \ +\infty \right[.$$

Autre méthode pour résoudre :

$$|x| < |x+1|$$

Nous avons

$$\begin{aligned} |x| < |x+1| \quad & \Longleftrightarrow \quad x^2 < (x+1)^2 \\ & \Longleftrightarrow \quad x^2 < x^2 + 2x + 1 \\ & \Longleftrightarrow \quad 0 < 2x + 1 \\ & \Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{2} < x. \end{aligned}$$

Exercice 6

$$|2x - 1| < |x - 1|.$$

Nous allons utiliser une méthode différente à celle de l'exercice précédent. Pour cela rappelons :

- Pour tout $x > 0$:

$$x \leq a \iff x^2 \leq a^2 \quad \text{et} \quad a \geq 0.$$

- Pour tous $x \geq 0$, $a \geq 0$:

$$x \leq a \iff x^2 \leq a^2.$$

- Pour tous $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$:

$$x^2 \leq a^2 \iff |x| \leq |a|.$$

Exercice 6

Solution : On a

$$\begin{aligned}
|2x-1|<|x-1| &\iff (2x-1)^2<(x-1)^2\\
&\iff 4x^2-4x+1<x^2-2x+1\\
&\iff 3x^2-2x<0\\
&\iff x\cdot(3x-2)<0\\
&\iff 3x\cdot\left(x-\frac{2}{3}\right)<0\\
&\iff x\cdot\left(x-\frac{2}{3}\right)<0\\
&\iff 0<x \quad \text{et} \quad x<\frac{2}{3}\\
&\iff 0<x<\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Exercice 6

L'inéquation a donc par ensemble solution, l'intervalle

$$\left]\, 0 \,,\, \frac{2}{3} \,\right[.$$

Exercice 6

$$||x+3|-1| \leq 2$$

Solution : En utilisant la définition de la valeur absolue, l'inéquation $||x+3|-1| \leq 2$ peut être réécrit sous la forme

$$-2 \leq |x+3| - 1 \leq 2$$

Ce qui est équivalent à

$$-1 \leq |x+3| \leq 3,$$

et comme $|x+3|$ est toujours positif, la dernière inéquation est équivalent à

$$0 \leq |x+3| \leq 3.$$

D'où on déduit

$$\begin{aligned} 0 \leq |x+3| \leq 3 \quad &\Longleftrightarrow \quad -3 \leq x+3 \leq 3 \\ &\Longleftrightarrow \quad -6 \leq x \leq 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, l'inéquation a par ensemble solution l'intervalle

$$[-6, 0].$$

Exercice 6

$$\frac{x-1}{x+2} \geq 3$$

Solution : On a deux cas à étudier :

- Si $x > -2$, alors

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{x+2} \geq 3 &\iff x-1 \geq 3x+6 \\ &\iff -7 \geq 2x \\ &\iff -\frac{7}{2} \geq x. \end{aligned}$$

  Mais on ne peut pas avoir en même temps $-\frac{7}{2} \geq x$ et $x > -2$. Par conséquent, sur l'intervalle $]-2, +\infty[$ l'inéquation n'a pas de solution.

- Si $x < -2$, alors

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{x+2} \geq 3 &\iff x-1 \leq 3x+6 \\ &\iff -7 \leq 2x \\ &\iff -\frac{7}{2} \leq x. \end{aligned}$$

Exercice 6

L'inéquation a donc par ensemble solution, l'intervalle

$$\left[-\frac{7}{2} \,,\, -2 \right[.$$

Autre méthode : On a

$$\frac{x-1}{x+2} \geq 3 \iff \frac{x-1}{x+2} - 3 \geq 0 \iff \frac{-2x-7}{x+2} \geq 0.$$

Par conséquent, l'inéquation précédente est vraie si et seulement si le numerateur et le denominateur ont le même signe (ou si le numerateur est zero). En faisant un tableau de signe on obtient

Valeurs de x	$-\infty$		-7/2		-2		$+\infty$
$-2x-7$		$+$		-		-	
$x+2$		-		-		$+$	
$\frac{-2x-7}{x+2}$		-		$+$		-	

L'inéquation a donc par ensemble solution, l'intervalle

$$\left[-\frac{7}{2} \,,\, -2 \right[.$$

Exercice 6

$$\sqrt{x-3} - \sqrt{2x+1} \leq 4$$

Solution : On commence par noter que, pour que l'inéquation soit bien définie, il faut

- $x - 3 \geq 0 \iff x \geq 3$, et
- $2x + 1 \geq 0 \iff x \geq -\frac{1}{2}$.

L'inéquation est donc bien définie si et seulent si $x \geq 3$. Maintenant, pour $x \geq 3$, on a

$$-4 < x \implies x - 4 < 2x \implies 0 \leq x - 3 < 2x + 1,$$

d'où on conclut en prenant la racine carrée

$$\sqrt{x-3} < \sqrt{2x+1},$$

ce qui est équivalent à

$$\sqrt{x-3} - \sqrt{2x+1} < 0.$$

Par conséquent, pour tout $x \geq 3$ on a

$$\sqrt{x-3} - \sqrt{2x+1} \; < \; 0 \; \leq \; 4.$$

L'inéquation a donc par ensemble solution, l'intervalle

$$[3, +\infty[.$$

Exercice 6

$$\sqrt{x^2 - 2x + 3} \leq x - 1.$$

Solution : On cherche à résoudre : $\sqrt{x^2 - 2x + 3} \leq x - 1$. On separe le problème en trois cas :

- Si $x < 1$, alors $x - 1 < 0$ mais
$$\sqrt{x^2 - 2x + 3}$$
est toujours un réel positif. Par conséquent, sur l'intervalle $]-\infty, 1[$ l'inéquation n'a pas de solution.
- Si $x = 1$, on obtient
$$\sqrt{1^2 - 2 \cdot 1 + 3} = \sqrt{2} > 0.$$
Donc, $x = 1$ n'est pas une solution de l'inéquation.
- Si $x > 1$, on peut écrire
$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 2x + 3} \leq x - 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad x^2 - 2x + 3 \leq (x-1)^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad x^2 - 2x + 3 \leq x^2 - 2x + 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad 3 \leq 1. \end{aligned}$$
Contradiction ! Par conséquent, sur l'intervalle $]1, +\infty[$ l'inéquation n'a pas de solution.

Exercice 7

Calculer la valeur de :

1. $$\sum_{i=1}^{n} 2$$

   Solution : On a

   $$\sum_{i=1}^{n} 2 = 2\left(\sum_{i=1}^{n} 1\right) = 2\left(\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n \text{ fois}}\right) = 2n$$

2. $$\prod_{i=1}^{n} 3$$

   Solution : On a

   $$\prod_{i=1}^{n} 3 = \left(\underbrace{3\cdot 3\cdot 3\cdot \quad \cdots \quad \cdot 3}_{n \text{ fois}}\right) = 3^n.$$

Exercice 7

$$\sum_{k=1}^{n}(2a_{k+1} - 3a_k + a_{k-1})$$

Solution : Notons que

$$\begin{aligned} 2a_{k+1} - 3a_k + a_{k-1} &= 2a_{k+1} - 2a_k - a_k + a_{k-1} \\ &= 2(a_{k+1} - a_k) - (a_k - a_{k-1}). \end{aligned}$$

Ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}(2a_{k+1} - 3a_k + a_{k-1}) &= \sum_{k=1}^{n} 2(a_{k+1} - a_k) - (a_k - a_{k-1}) \\ &= 2\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k) - \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}). \end{aligned}$$

Maintenant

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1})$$

sont de sommes téléscopiques.

Exercice 7

Par conséquent

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k) &= (a_{n+1}-a_1)\\ \sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1}) &= (a_n-a_0).\end{aligned}$$

D'où on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(2a_{k+1}-3a_k+a_{k-1}) &= 2\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k) - \sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})\\ &= 2(a_{n+1}-a_1) - (a_n-a_0)\\ &= 2a_{n+1} - a_n - 2a_1 + a_0.\end{aligned}$$

Exercice 7

$$\sum_{k=1}^{n} k.$$

Solution : Notons que

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n - 1 + n$$

$$+$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = n + n - 1 + \cdots + 3 + 2 + 1$$

$$2\sum_{k=1}^{n} k = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1)}_{n \text{ fois}}$$

Par conséquent

$$2\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1).$$

Exercice 7

d'où on conclut

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice 7

$$\sum_{k=2}^{n} 3^{2k}.$$

Solution : On commence par rappeler la valeur de la somme géométrique. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 1$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$

Pour demontrer cette formule il suffit de noter

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k & = & 1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1} + a^n \\ & & \qquad\qquad - \\ \displaystyle a \cdot \sum_{k=0}^{n} a^k & = & a + a^2 + \cdots + a^n + a^{n+1} \\ \hline \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k - a \cdot \sum_{k=0}^{n} a^k & = & 1 - a^{n+1} \end{array}$$

Exercice 7

Par conséquent

$$(1-a)\cdot\sum_{k=0}^{n} a^k \;=\; \sum_{k=0}^{n} a^k - a\cdot\sum_{k=0}^{n} a^k \;=\; 1-a^{n+1}$$

Ainsi

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}.$$

Maintenant

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} 3^{2k} \;=\; \sum_{k=2}^{n} 9^k \quad &= \quad \sum_{k=0}^{n} 9^k \;-\; (1+9)\\ &= \quad \frac{1-9^{n+1}}{1-9} - 10\\ &= \quad \frac{9^{n+1}-1}{8} - \frac{80}{8} \;=\; \frac{9^{n+1}-9^2}{8} \;=\; \frac{9^2(9^{n-1}-1)}{8}.\end{aligned}$$

Exercice 7

En remarquant que

$$(k+1)^2 - k^2 = 2k+1,$$

montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1) = n^2 = \sum_{k=1}^{n}(2k-1).$$

Solution : En effet on a

$$(k+1)^2 - k^2 = k^2 + 2k + 1 - k^2 = 2k+1.$$

Ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1) &= \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}\left((k+1)^2 - k^2\right)}_{\text{somme télescopique de terme } a_k = k^2} \\
&= a_n - a_0 \\
&= n^2 - (0)^2 \\
&= n^2.
\end{aligned}$$

Exercice 7

Notons aussi que

$$k^2 - (k-1)^2 = k^2 - (k^2 - 2k + 1) = 2k - 1.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(2k-1) &= \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\left(k^2 - (k-1)^2\right)}_{\text{somme télescopique de terme } a_k=(k-1)^2} \\
&= a_{n+1} - a_1 \\
&= (n+1-1)^2 - (1-1)^2 \\
&= n^2.
\end{aligned}$$

Exercice 7

Autre manière pour montrer que

$$\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1) \ = \ \sum_{k=1}^{n}(2k-1).$$

Utilisons le changement d'indice $k' = k+1$. Alors

$$k=0 \quad \Longrightarrow \quad k'=1 \quad \text{et} \quad k=n-1 \quad \Longrightarrow \quad k'=n,$$

et on peut écrire

$$\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1) \ = \ \sum_{k'=1}^{n}\left(2(k'-1)+1\right) \ = \ \sum_{k'=1}^{n}(2k'-1).$$

Exercice 7

Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)^3-\sum_{k=0}^{n}k^3=3\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{(n+1)(3n+2)}{2}.$$

En déduire $\sum_{k=0}^{n}k^2$.

Solution : On commence par noter que

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(k+1)^3-\sum_{k=0}^{n}k^3 &= \sum_{k=0}^{n}\left((k+1)^3-k^3\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(k^3+3k^2+3k+1-k^3\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(3k^2+3k+1\right)\\ &= 3\sum_{k=0}^{n}k^2+3\sum_{k=0}^{n}k+\sum_{k=0}^{n}1.\end{aligned}$$

Exercice 7

Maintenant

$$\sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$$

et d'après l'Exercice 7 Question 4 on sait

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(k+1)^3 - \sum_{k=0}^{n} k^3 &= 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + 3\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 \\
&= 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\
&= 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + \frac{3n(n+1)+2(n+1)}{2} \\
&= 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + \frac{(n+1)(3n+2)}{2}.
\end{aligned}$$

Exercice 7

D'autre part

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)^3 - \sum_{k=0}^{n} k^3 = \underbrace{\sum_{k=0}^{n}(k+1)^3 - k^3}_{\text{somme télescopique de terme } a_k = k^3}$$
$$= (n+1)^3 - 0^3$$
$$= (n+1)^3.$$

Ce qui nous permet de conclure que

$$(n+1)^3 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{(n+1)(3n+2)}{2}$$

D'où on déduit l'égalité

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{2(n+1)^3 - (n+1)(3n+2)}{6}.$$

Exercice 7

Finalement,

$$\begin{aligned}\frac{2(n+1)^3-(n+1)(3n+2)}{6} &= \frac{(n+1)[2(n+1)^2-(3n+2)]}{6}\\ &= \frac{(n+1)[(2n^2+4n+2)-(3n+2)]}{6}\\ &= \frac{(n+1)[2n^2+n]}{6}\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.\end{aligned}$$

et on conclut

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 8

Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} 5^k \binom{n}{k} \quad ; \quad \sum_{k=0}^{n-1} (-3)^k \binom{n}{k} \quad ; \quad \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}.$$

Solution :

- $$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} 5^k \binom{n}{k} &= \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 5^k + \binom{n}{0} 5^0 \right) - \binom{n}{0} 5^0 \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 5^k \right) - \binom{n}{0} 5^0 \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 5^k \right) - 1 \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 5^k \cdot 1^{n-k} \right) - 1 \\
&= (5+1)^n - 1 = 6^n - 1.
\end{aligned}$$

Exercice 8

- $$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1}(-3)^k\binom{n}{k} &= \left(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}(-3)^k \;+\; \binom{n}{n}(-3)^n\right) - \binom{n}{n}(-3)^n \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-3)^k\right) - \binom{n}{n}(-3)^n \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-3)^k\right) - (-3)^n \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-3)^k \cdot 1^{n-k}\right) - (-3)^n \\
&= (-3+1)^n - (-3)^n \\
&= (-2)^n - (-3)^n.
\end{aligned}$$

Exercice 8

- $$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k\cdot n!}{k!(n-k)!}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$$

Utilisons le changement d'indice $k' = k-1$. Alors

$$k = 1 \quad \Longrightarrow \quad k' = 0 \quad \text{et} \quad k = n \quad \Longrightarrow \quad k' = n-1,$$

et on peut écrire

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = \sum_{k'=0}^{n-1} \frac{n!}{k'!((n-1)-k')!}$$
$$= n\cdot\sum_{k'=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k'!((n-1)-k')!}$$

Exercice 8

Ainsi

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} &= n\sum_{k'=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{k'!((n-1)-k')!}\\
&= n\cdot\sum_{k'=0}^{n-1}\binom{n-1}{k'}\\
&= n\cdot\sum_{k'=0}^{n-1}\binom{n-1}{k'}1^{k'}\cdot 1^{n-1-k'}\\
&= n\cdot(1+1)^{n-1}\\
&= n\cdot 2^{n-1}.
\end{aligned}$$

Exercice 9

Écrire à l'aide de factorielles les expressions suivantes :

$$\prod_{k=1}^{n} k^2 \quad ; \quad \prod_{k=3}^{n-1} k \quad ; \quad \prod_{k=2}^{n} 2k+1.$$

Solution :

- $$\prod_{k=1}^{n} k^2 \;=\; \left(\prod_{k=1}^{n} k\right)^2 \;=\; (n!)^2.$$

- $$\prod_{k=3}^{n-1} k \;=\; \frac{1}{1\cdot 2}\cdot\prod_{k=1}^{n-1} k \;=\; \frac{(n-1)!}{2}$$

Exercice 9

- $$\begin{aligned}
\prod_{k=2}^{n} 2k+1 &= \left(\prod_{k=5}^{2n+1} k\right) \cdot \left(\prod_{k=3}^{n} 2k\right)^{-1} \\
&= \left(\prod_{k=5}^{2n+1} k\right) \cdot \left(\prod_{k=3}^{n} k\right)^{-1} \cdot \left(\prod_{k=3}^{n} 2\right)^{-1} \\
&= \left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \cdot \prod_{k=1}^{2n+1} k\right) \cdot \left(\frac{1}{1\cdot 2} \prod_{k=1}^{n} k\right)^{-1} \cdot \frac{1}{2^{n+1-3}} \\
&= \frac{(2n+1)!}{4!} \cdot \left(\frac{n!}{2}\right)^{-1} \cdot \frac{1}{2^{n-2}} \\
&= \frac{(2n+1)!}{12 \cdot 2^{n-2} n!}
\end{aligned}$$

Exercice 10

Calculer les produits suivants :

$$\prod_{k=0}^{n} 3^k \quad ; \quad \prod_{k=2}^{n} \frac{k}{k+2}.$$

Solution :

- $$\prod_{k=0}^{n} 3^k = 3 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdots 3^n = 3^{1+2+3+\cdots+n} = 3^{\sum_{k=1}^{n} k} = 3^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

- $$\prod_{k=2}^{n} \frac{k}{k+2} = \frac{\prod_{k=2}^{n} k}{\prod_{k=2}^{n} k+2}$$

  Maintenant, le changement d'indice $k' = k+2$, nous permet d'écrire

  $$\prod_{k=2}^{n} k+2 \underbrace{=}_{k=2,\, k=n \implies k'=4,\, k'=n+2} \prod_{k'=4}^{n+2} k' = \prod_{k=4}^{n+2} k.$$

Exercice 10

Ainsi

$$\frac{\prod_{k=2}^{n} k}{\prod_{k=2}^{n} k+2} = \frac{\prod_{k=2}^{n} k}{\prod_{k=4}^{n+2} k} = \frac{2 \cdot 3 \cdot \prod_{k=4}^{n} k}{(n+1)(n+2) \cdot \prod_{k=4}^{n} k} = \frac{6}{(n+1)(n+2)}.$$

Par conséquent

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k}{k+2} = \frac{6}{(n+1)(n+2)}.$$

Pour aller plus loin - Exercice 11

Soit $p \in \mathbb{N}^{\times}$ et $n \in \mathbb{N}^{\times}$ tels que $p < n$. Montrer que

$$\binom{n}{p+1} = \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \cdots + \binom{n-1}{p}.$$

Solution : On commence par rappeler la définition du **coefficients binomial** : pour toute couple d'entiers $0 \leq k \leq n$ on appelle **coefficients binomial** le nombre

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Le nombre $\binom{n}{k}$ se lit : k **parmi** n. Le coefficient binomial satisfait la propriété suivant, appellée **Formule de Pascal** : pour tous entiers n et k tels que $0 < k \leq n$ on a

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n-1}{k+1} + \binom{n-1}{k}.$$

Pour aller plus loin - Exercice 11

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n-1}{k+1} + \binom{n-1}{k}.$$

Preuve :

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{k+1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k+1)!(n-2-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}\\ &= (n-1)!\left(\frac{1}{(k+1)!(n-2-k)!} + \frac{1}{k!(n-1-k)!}\right)\end{aligned}$$

Maintenant

$$(k+1)! = k!(k+1) \quad \text{et} \quad (n-1-k)! = (n-2-k)!(n-1-k).$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{(k+1)!(n-2-k)!} &= \frac{n-1-k}{(k+1)!(n-2-k)!(n-1-k)} = \frac{n-1-k}{(k+1)!(n-1-k)!}\\ \frac{1}{k!(n-1-k)!} &= \frac{k+1}{k!(k+1)(n-1-k)!} = \frac{k+1}{(k+1)!(n-1-k)!}.\end{aligned}$$

Pour aller plus loin - Exercice 11

D'où on conclut

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k+1} + \binom{n-1}{k} &= (n-1)! \left(\frac{1}{(k+1)!(n-2-k)!} + \frac{1}{(k+1)!(n-1-k)!} \right) \\
&= (n-1)! \left(\frac{n-1-k}{(k+1)!(n-1-k)!} + \frac{k+1}{(k+1)!(n-1-k)!} \right) \\
&= (n-1)! \frac{(n-1-k+k+1)}{(k+1)!(n-1-k)!} \\
&= (n-1)! \frac{n}{(k+1)!(n-1-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!n}{(k+1)!(n-1-k)!} \\
&= \frac{n!}{(k+1)!(n-1-k)!} \\
&= \binom{n}{k+1}.
\end{aligned}$$

Pour aller plus loin - Exercice 11

En utilisant la formule de Pascal, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\binom{n}{p+1} &= \binom{n-1}{p+1} + \binom{n-1}{p}\\
\binom{n-1}{p+1} &= \binom{n-2}{p+1} + \binom{n-2}{p}\\
\binom{n-2}{p+1} &= \binom{n-3}{p+1} + \binom{n-3}{p}\\
\vdots \quad & \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots\\
\binom{p+3}{p+1} &= \binom{p+2}{p+1} + \binom{p+2}{p}\\
\binom{p+2}{p+1} &= \binom{p+1}{p+1} + \binom{p+1}{p} = \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p}.
\end{aligned}$$

Pour aller plus loin - Exercice 11

Ce qui nous permet de conclure

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{p+1} &= \underbrace{\binom{n-1}{p+1}} + \binom{n-1}{p} \\
&= \underbrace{\binom{n-2}{p+1}} + \binom{n-2}{p} + \binom{n-1}{p} \\
&= \binom{n-3}{p+1} + \binom{n-3}{p} + \binom{n-2}{p} + \binom{n-1}{p} \\
&\quad\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
&= \underbrace{\binom{p+2}{p+1}} + \binom{p+2}{p} + \cdots + \binom{n-3}{p} + \binom{n-2}{p} + \binom{n-1}{p} \\
&= \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \cdots + \binom{n-3}{p} + \binom{n-2}{p} + \binom{n-1}{p}.
\end{aligned}
$$

Pour aller plus loin - Exercice 11

Deuxième méthode : Montrons l'égalité

$$\mathscr{P}(n)\ :\ \binom{n}{p+1} \quad = \quad \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \cdots + \binom{n-1}{p}$$

en utilisant un raisonnement par recurrence sur $n > 2$.

Initialisation : Pour $n = 2$, nécessairement $p = 1$ et on a

$$\begin{aligned} \binom{n}{p+1} \quad &= \quad \binom{2}{2} = 1 \\ \binom{p}{p} \quad &= \quad \binom{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

Les deux sont égaux, donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Pour aller plus loin - Exercice 11

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, c'est-à-dire

$$\binom{n}{p+1} = \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \cdots + \binom{n-1}{p}.$$

Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, autrement dit, montrons

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \cdots + \binom{n}{p}.$$

Partons du membre de droite

$$\begin{aligned}\binom{p}{p} + \cdots + \binom{n-1}{p} + \binom{n}{p} &= \left(\binom{p}{p} + \cdots + \binom{n-1}{p}\right) + \binom{n}{p} \\ &= \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p}\end{aligned}$$

d'après l'hypothèse de récurrence.

Pour aller plus loin - Exercice 11

Maintenant, à l'aide de la formule de Pascale, nous pouvons écrire

$$\binom{n}{p+1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \cdots + \binom{n-1}{p} + \binom{n}{p} &= \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p} \\ &= \binom{n+1}{p+1}\end{aligned}$$

Donc la propriété est vraie pour $n+1$. Fin de la recurrence. Par conséquent $\mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)$, et on conclut que pour tout entier naturel n on a

$$\binom{n}{p+1} = \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \cdots + \binom{n-1}{p}.$$

Exercice 12

Démontrer les formules suivantes :

- $$\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
- $$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

Rappelons certaines propriétés des fonction sinus et cosinus :

$$\begin{aligned}
\sin(x+2\pi) &= \sin(x)\\
\cos(x+2\pi) &= \cos(x)\\
\sin(-x) &= -\sin(x)\\
\cos(-x) &= \cos(x)\\
\sin^2(x) + \cos^2(x) &= 1
\end{aligned}$$

Exercice 12

Formules d'addition :

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

Pour $x = y$, ces relations s'appellent **formules de duplication**

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$
$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x.$$

À partir de ces formules (ou en regardant le cercle trigonométrique) on peut déduire

$$\sin(x+\pi) = -\sin(x) \quad \text{et} \quad \sin(x-\pi) = \sin(x).$$
$$\sin(x+\pi/2) = \cos(x) \quad \text{et} \quad \sin(x-\pi/2) = \cos(x).$$
$$\cos(x+\pi) = -\cos(x) \quad \text{et} \quad \cos(x-\pi) = -\cos(x).$$
$$\cos(x+\pi/2) = -\sin(x) \quad \text{et} \quad \cos(x+\pi/2) = \sin(x).$$

Exercice 12

$$\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

Solution : On commence par noter que

$$x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} \quad \text{et} \quad y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}.$$

En utilisant ces égalités on peut écrire

$$\begin{aligned}\sin(x) &= \sin\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right)\\ &= \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) + \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\end{aligned}$$

De manière similaire

$$\begin{aligned}\sin(y) &= \sin\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}\right)\\ &= \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) - \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\end{aligned}$$

En additionnant les deux égalités, on obtient

$$\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Exercice 12

Méthode 2 : En utilisant directement les formules de produit. En effet :

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) &= \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}\right)+\sin\left(\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sin(x)+\sin(y)\right).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\sin(x)+\sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Exercice 12

Montrons la deuxième égalité :

$$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Pour cela, on commence par noter que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \;=\; \sin(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos(x)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \;=\; \cos(x).$$

Identité qui nous permet aussi d'écrire

$$-\cos(y) = -\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right),$$

et en utilisant que sinus est une fonction impaire, on déduit

$$-\cos(y) = \sin\left(-y-\frac{\pi}{2}\right).$$

Par conséquent

$$\cos(x)-\cos(y) = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(-y-\frac{\pi}{2}\right).$$

Maintenant, en utilisant l'exercice précédent, on obtient

$$\cos(x)-\cos(y) = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$$

Exercice 12

Finalement

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{x+y}{2}+\frac{\pi}{2}\right) &= \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\\ &= -\sin\left(\frac{x+y}{2}\right).\end{aligned}$$

d'où on conclut

$$\begin{aligned}\cos(x)-\cos(y) &= 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\\ &= -2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y}{2}\right).\end{aligned}$$

Exercice 12

Méthode 2 : En utilisant directement les formules de produit. En effet :

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) &= \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}\right)-\cos\left(\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\cos(y)-\cos(x)\right).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\cos(x)-\cos(y) = -2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Exercice 12

Démontrer la formule suivante

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$$

Solution : En utilisant la définition de la tangente, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)} &= \frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}+\frac{\sin(y)}{\cos(y)}}{1-\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\frac{\sin(y)}{\cos(y)}} \\
&= \frac{\frac{\sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y)}}{\frac{\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y)}} \\
&= \frac{\sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)} \\
&= \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} \\
&= \tan(x+y)
\end{aligned}$$

Exercice 12

Autre Méthode :

$$\begin{aligned}
\tan(x+y) &= \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} \\
&= \frac{\sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)} \\
&= \frac{\cos(x)\cos(y)\left(\frac{\sin(x)\cos(y)}{\cos(x)\cos(y)}+\frac{\cos(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y)}\right)}{\cos(x)\cos(y)\left(1-\frac{\sin(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y)}\right)} \\
&= \frac{\cos(x)\cos(y)\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}+\frac{\sin(y)}{\cos(y)}\right)}{\cos(x)\cos(y)\left(1-\frac{\sin(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y)}\right)} \\
&= \frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}+\frac{\sin(y)}{\cos(y)}}{1-\frac{\sin(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y)}} = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}.
\end{aligned}$$

Exercice 12

Soit
$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right).$$
Démontrer les formules suivantes

- $$\frac{1-t^2}{1+t^2} = \cos(x).$$
- $$\frac{2t}{1+t^2} = \sin(x).$$

Exercice 12

Solution : Montrons la première identité. On compute

$$\begin{aligned}
\frac{1-t^2}{1+t^2} &= \frac{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= \frac{1-\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{1+\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} \\
&= \frac{\frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{\frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} \\
&= \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \\
&= \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \cos(x).
\end{aligned}$$

Exercice 12

Montrons la deuxième égalité. On compute

$$\begin{aligned}
\frac{2t}{1+t^2} = \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}}{1+\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} &= \frac{2\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}}{\frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} \\
&= \frac{2\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}}{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} \\
&= 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) \\
&= \sin\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) \\
&= \sin(x).
\end{aligned}$$

Exercice 13

Calculer

$$\cos\frac{\pi}{12}, \quad \sin\frac{\pi}{12} \quad \text{et} \quad \tan\frac{\pi}{12}.$$

Rappelons quelques valeurs remarquables du sinus, du cosinus et de la tangente

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	

Exercice 13

Solution : On commence par noter que

$$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\cos \frac{\pi}{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) \\
&= \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\
&= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.
\end{aligned}$$

Exercice 13

et

$$\begin{aligned}
\sin\frac{\pi}{12} &= \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\\
&= \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\\
&= \frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.
\end{aligned}$$

Finalement

$$\tan\frac{\pi}{12}=\frac{\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}.$$

Exercice 14

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin(x) + \sin(2x) = 0.$$

Résolution d'équations : Pour tous x, $y \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}
\sin(x) = \sin(y) \quad &\Longleftrightarrow \quad x = y + 2k\pi \quad \text{ou} \\
& \quad x = \pi - y + 2k\pi, \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \\
\cos(x) = \cos(y) \quad &\Longleftrightarrow \quad x = y + 2k\pi \quad \text{ou} \\
& \quad x = -y + 2k\pi, \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \\
\tan(x) = \tan(y) \quad &\Longleftrightarrow \quad x = y + k\pi, \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Exercice 14

Solution : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \sin(x) + \sin(2x) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \sin(x) + 2\sin(x)\cos(x) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \sin(x)(1 + 2\cos(x)) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\sin(x) + \sin(2x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sin(x) = 0 \ \text{ ou } \ (1 + 2\cos(x)) = 0.$$

Maintenant

- $\sin(x) = 0$, si et seulement si
$$x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$
- $(1 + 2\cos(x)) = 0$, si et seulement si
$$\cos(x) = -\frac{1}{2}.$$
Essayons de trouver x tel que $\cos(x) = -\frac{1}{2}$. La table de valeurs remarquables nous dit que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, mais
$$\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \ = \ -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \ = \ -\frac{1}{2} \Longrightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -1/2.$$

Exercice 14

D'où on conclut que $(1 + 2\cos(x)) = 0$ si et seulement si

$$x = \frac{2\pi}{3} \; + \; 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{2\pi}{3} \; + \; 2k\pi.$$

ou de manière équivalente

$$x = \frac{2\pi}{3} \; + \; 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{4\pi}{3} \; + \; 2k\pi.$$

Finalement, l'ensemble des solutions est

$$S = \left\{ k\pi, \; \frac{2\pi}{3} \; + \; 2k\pi, \; \frac{4\pi}{3} \; + \; 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Exercice 14

Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos(x) = \sqrt{3}\sin(x).$$

Solution : Notons que si $\cos(x) = 0$, alors $\sin(x) = \pm 1$, l'équation donnerait :

$$0 = \pm\sqrt{3}$$

Ce qui est absurde. On peut donc supposer $\cos(x) \neq 0$, ce qui nous autorise à faire la division suivante

$$\begin{aligned}
\cos(x) = \sqrt{3}\sin(x) \quad &\iff \quad \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\
&\iff \quad \tan(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \\
&\iff \quad \tan(x) = \tan\frac{\pi}{6}.
\end{aligned}$$

Donc, l'ensemble des solutions est

$$S = \left\{ \frac{\pi}{6} \; + \; k\pi : \quad k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Exercice 14

Autre méthode : Nous avons

$$\begin{aligned}
\cos(x) = \sqrt{3}\sin(x) &\iff \cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = 0\\
&\iff 2\left(\frac{1}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)\right) = 0\\
&\iff \frac{1}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x) = 0\\
&\iff \cos\frac{\pi}{3}\cos(x) - \sin\frac{\pi}{3}\sin(x) = 0\\
&\iff \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0\\
&\iff \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{2}\\
&\iff x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\\
&\iff x = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} + 2k\pi\\
&\iff x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi.
\end{aligned}$$

Exercice 14

Ainsi, l'ensemble des solutions est

$$\begin{aligned} S &= \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \ : k \in \mathbb{Z} \right\} \\ &= \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi \ : k \in \mathbb{Z} \right\}. \end{aligned}$$

Exercice 14

Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\tan(2x) = 3\tan(x).$$

Solution : Pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

on a

$$\begin{aligned}
\tan(2x) = 3\tan(x) \quad &\iff \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)} = 3\tan(x) \\
&\iff 2\tan(x) = 3\tan(x)(1-\tan^2(x)) \\
&\iff \tan(x)[2-3(1-\tan^2(x))] = 0 \\
&\iff \tan(x) = 0 \quad \text{ou} \quad 2-3(1-\tan^2(x)) = 0 \\
&\iff \tan(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \tan^2(x) = \frac{1}{3} \\
&\iff \tan(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \tan(x) = \sqrt{\frac{1}{3}} \quad \text{ou} \quad \tan(x) = -\sqrt{\frac{1}{3}}.
\end{aligned}$$

Exercice 14

Maintenant

- $\tan(x) = 0$ si et seulement si $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
- $\tan(x) = \sqrt{\frac{1}{3}}$ si et seulement si $x = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
- $\tan(x) = -\sqrt{\frac{1}{3}}$ si et seulement si $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Par conséquent, l'ensemble des solutions est

$$S = \left\{ k\pi,\ \frac{\pi}{6}\ +\ k\pi,\ -\frac{\pi}{6}\ +\ k\pi : \quad k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Exercices Supplémentaires

- Résoudre les équations suivantes :

$$\frac{3}{x-1} \leq \frac{5}{2x+1} \quad \text{et} \quad \frac{x^2-6x+8}{x-1} < 0.$$

- Calculer la somme :

$$\sum_{k=1}^{n} = 3^k.$$

- Résoudre les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \cos^2(x) - \cos(x) &= 0 \\ \tan(x) &= 1 \\ \tan\left(\frac{\pi}{4}(\sin(x)+1)\right) &= 1. \end{aligned}$$