Rattrapage

Électromagnétisme

07 Février 2024 — PréIng2

Durée : 1h30 minutes (2h en cas de tiers temps)

Sont interdits :

— les documents ;

— tous les objets électroniques (calculatrice, téléphone, tablette, ordinateur...) de même que les montres connectées ;

— les déplacements et les échanges.

Consignes :

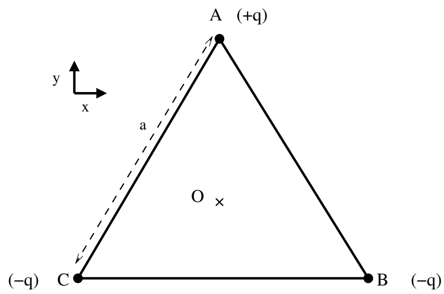
1. Vérifiez que le sujet est composé de 16 pages et 21 questions ;
2. Seules les dernières feuilles doivent être rendues ;
3. Complétez la page 9 (nom, prénom etc...) dès le début officiel de l'épreuve ;
4. Les détails des calculs demandés doivent être portés sur ces dernières feuilles à l'emplacement correspondant à la question ;
5. Dans les deux grilles, les cases correspondant à la bonne réponse doivent être remplies complètement au stylo noir ;
6. Chaque question ne comporte qu'une seule réponse possible ;
7. Il n'y a pas de point négatif pour une mauvaise réponse ;
8. Une case simplement cochée ne sera pas comptabilisée.

Le barème est donné à titre indicatif.

Champ créé par 3 charges ponctuelles (4 points)

Trois charges ponctuelles $+q$ (située en A), $-q$ (située en B) et $-q$ (située en C) sont placées aux sommets d'un triangle équilatéral de côté a (cf. figure).

On va chercher à calculer le champ électrostatique $\vec{E}(O)$ créé au centre O de ce triangle équilatéral par ces trois charges ponctuelles.



Question 1 (1 point) L'expression littérale du champ électrique total $\vec{E}(O)$ dû aux trois charges s'écrit :

A $\vec{E}(O) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\overrightarrow{AO}}{\|\overrightarrow{AO}\|^2} - \frac{\overrightarrow{BO}}{\|\overrightarrow{BO}\|^2} + \frac{\overrightarrow{CO}}{\|\overrightarrow{CO}\|^2}\right]$

■ $\vec{E}(O) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\overrightarrow{AO}}{\|\overrightarrow{AO}\|^3} - \frac{\overrightarrow{BO}}{\|\overrightarrow{BO}\|^3} - \frac{\overrightarrow{CO}}{\|\overrightarrow{CO}\|^3}\right]$

B $\vec{E}(O) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\overrightarrow{AO}}{\|\overrightarrow{AO}\|^2} + \frac{\overrightarrow{BO}}{\|\overrightarrow{BO}\|^2} - \frac{\overrightarrow{CO}}{\|\overrightarrow{CO}\|^2}\right]$

D $\vec{E}(O) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\overrightarrow{AO}}{\|\overrightarrow{AO}\|^3} + \frac{\overrightarrow{BO}}{\|\overrightarrow{BO}\|^3} + \frac{\overrightarrow{CO}}{\|\overrightarrow{CO}\|^3}\right]$

E *Aucune des réponses précédentes n'est correcte.*

Question 2 (1 point) Retrouver l'expression de la distance $\|\overrightarrow{AO}\|$ en fonction de a. On utilisera les propriétés du triangle équilatéral.

A $\|\overrightarrow{AO}\| = \frac{a}{2}$

■ $\|\overrightarrow{AO}\| = \frac{a}{\sqrt{3}}$

B $\|\overrightarrow{AO}\| = \frac{a}{3}$

E *Aucune des réponses précédentes n'est correcte.*

C $\|\overrightarrow{AO}\| = \frac{2a}{\sqrt{3}}$

Question 3 (0.5 point) En déduire que le champ électrique total $\vec{E}(O)$ vaut :

A $\vec{E}(O) = -\frac{3q}{2\pi\epsilon_0 a^3}\vec{u}_y$

■ $\vec{E}(O) = -\frac{3q}{2\pi\epsilon_0 a^2}\vec{u}_y$

B $\vec{E}(O) = \frac{q}{\pi\epsilon_0 a^2}\vec{u}_y$

E $\vec{E}(O) = -\frac{q}{\pi\epsilon_0 a^2}\vec{u}_y$

C $\vec{E}(O) = \frac{3q}{2\pi\epsilon_0 a^2}\vec{u}_y$

F *Aucune des réponses précédentes n'est correcte.*

Question 4 (1.5 points)
Détailler les calculs permettant d'obtenir l'expression du champ électrique total $\vec{E}(O)$.
Répondez sur la feuille correspondante, à la fin du sujet.

Sphère chargée uniformément en surface (6 points)

Pour rappel, il existe la *loi de Coulomb* et le *théorème de Gauss* pour calculer un champ électrique à partir d'une distribution de charges. Aussi :

Question 5 (0.5 point)
la **loi de Coulomb** permet de calculer la force $\vec{F}_{1/2}$ exercée par la charge ponctuelle q_1 sur la charge ponctuelle q_2, située à la distance r_{12} :

- [A] $\vec{F}_{2/1} = k \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\right) \vec{u}_{1\to2}$
- [■] $\vec{F}_{1/2} = k \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\right) \vec{u}_{1\to2}$
- [B] $\vec{F}_{1/2} = k \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}^3}\right) \vec{u}_{1\to2}$
- [D] *Aucune des réponses précédentes n'est correcte.*

Question 6 (0.5 point)
Le **théorème de Gauss** énonce que le flux Φ du champ $\vec{E}$, à travers une surface fermée S est relié à la charge intérieure q_{int}, contenue dans le volume V délimité par la surface S par :

[A]

$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = q_{int}$$

[■]

$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

[C]

$$\Phi = \iiint_V \vec{E} \cdot \vec{dV} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

[D] *Aucune des réponses précédentes n'est correcte.*

Question 7 (0.5 point)
En étudiant les plans de *symétrie pour une distribution de charges*, on trouve que

- [■] le champ électrostatique $\vec{E}$ en M est contenu dans tout plan Π de symétrie, passant par M.
- [B] la direction du champ électrostatique $\vec{E}$ en M est celle de la droite orthogonale à un plan Π de symétrie, passant par M.
- [C] la direction du champ électrostatique $\vec{E}$ en M est celle de la droite intersection d'au moins deux plans d'anti-symétrie, passant par M.
- [D] *Aucune des réponses précédentes n'est correcte.*

Maintenant, on considère une sphère de rayon R et de centre O ayant une *distribution surfacique* de charges de densité σ uniforme.

On cherche l'expression du champ electrique $\overrightarrow{E}(M)$ généré par cette distribution de charges.

Question 8 (0.5 point)
Le champ électrostatique $\overrightarrow{E}(M)$ créé par cette distribution est alors :

- [A] continu en tout point de l'espace, sauf sur les charges.
- ■ continu en tout point de l'espace sauf à la traversée de la surface chargée de la sphère.
- [C] continu en tout point de l'espace.
- [D] *Aucune des réponses précédentes n'est correcte.*

Question 9 (1 point)
La direction du champ électrostatique $\overrightarrow{E}$, au point M, créé par cette distribution est radiale car :

- [A] tous les plans $(M, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ et $(M, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$ sont des plans de symétrie.
- [B] tous les plans $(M, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ et $(M, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\phi})$ sont des plans de symétrie.
- ■ tous les plans passant par O et par M sont des plans de symétrie.
- [D] *Aucune des réponses précédentes n'est correcte.*

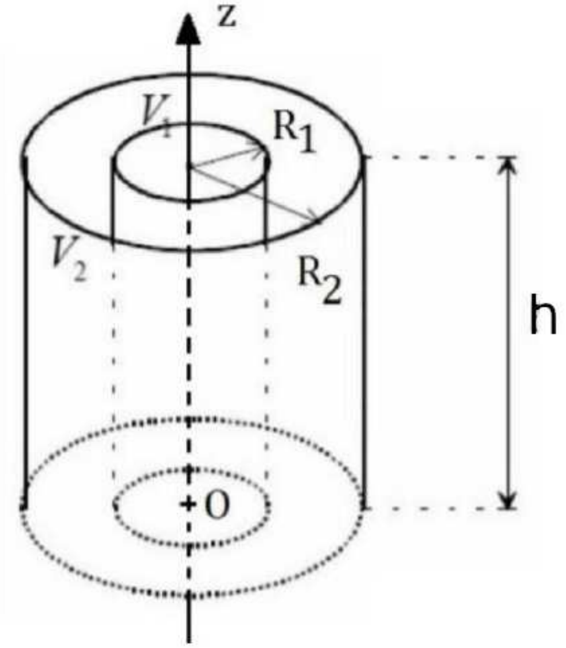
Question 10 (3 points)
Donner l'expression du champ électrique $\overrightarrow{E}$ pour $r > R$ en utilisant le *théorème de Gauss* et en détaillant les calculs (symétries, invariances ...).
Répondez sur la feuille correspondante, à la fin du sujet.

Condensateur cylindrique (6 points)

Un condensateur cylindrique à air est formé de deux armatures coaxiales, de rayons notés R_1 et R_2 avec $R_1 < R_2$ (cf.figure).

Ces deux cylindres infinis coaxiaux sont uniformément chargés en surface avec une charge Q_1 et Q_2 respectivement, et telles que $Q_1 = -Q_2 = Q_{int}$.

Q_{int} est la charge à la surface du cylindre intérieur de rayon R_1 et de hauteur h. On suppose ici que ce conducteur est de longueur infinie ($h \gg R_2 > R_1$).



Question 11 (1 point)
$\vec{E}$ en un point M situé à la distance r de l'axe, avec $R_1 < r < R_2$ vaut :

- [A] $\vec{E} = \dfrac{Q_{int}}{2\pi\epsilon_0 r}\vec{u}_r$
- [B] $\vec{E} = \dfrac{Q_{int}}{2\pi\epsilon_0 r^2}\vec{u}_r$
- ■ $\vec{E} = \dfrac{Q_{int}}{2\pi\epsilon_0 h r}\vec{u}_r$
- [D] *Aucune des réponses précédentes n'est correcte.*

Question 12 (2 points)
La capacité C de ce condensateur a pour expression :

■ $C = \dfrac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)}$

B $C = \dfrac{2\pi\epsilon_0 h}{\dfrac{R_2}{R_1}}$

C $C = \dfrac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln\left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)}$

D *Aucune des réponses précédentes n'est correcte.*

Question 13 (2 points)
Donner l'expression de cette capacité C en détaillant.
Répondez sur la feuille correspondante, à la fin du sujet.

Question 14 (1 point)
Pour $R_2 - R_1 = e \ll R_1$, cette capacité C se simplifie en :

A $C = \dfrac{2\pi\epsilon_0 e h}{R_1}$

B $C = \dfrac{2\pi\epsilon_0 R_1 e}{h}$

■ $C = \dfrac{2\pi\epsilon_0 R_1 h}{e}$

D *Aucune des réponses précédentes n'est correcte.*

Fil infini parcouru par un courant (6 points)

Pour rappel, il existe la *loi de Biot et Savart* et le *théorème d'Ampère* pour calculer un champ magnétique à partir d'une distribution de courant. Aussi :

Question 15 (0.5 point)
la **loi de Biot et Savart** permet de calculer le champ magnétique $\vec{B}$ en M, pour un fil parcouru par un courant I. Elle s'énonce :

■ $\vec{B}(M) = \oint\limits_{P\in \text{fil}} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{dl} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$

[B] $\vec{B}(M) = \oint\limits_{P\in \text{fil}} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{dl} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^2}$

[C] $\vec{B}(M) = \oint\limits_{P\in \text{fil}} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{dl} \wedge \overrightarrow{MP}}{MP^2}$

[D] *Aucune des réponses précédentes n'est correcte.*

Question 16 (0.5 point)
Le **théorème d'Ampère** relie le *champ magnétique* $\vec{B}$ et l'*intensité* des courants I_i (comptés algébriquement) qui traversent toute surface ouverte S, s'appuyant sur un contour Γ. Il s'énonce :

■ $\oint\limits_{\Gamma} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 \sum\limits_i I_i$

[B] $\oiint\limits_{\Gamma} \vec{B} \cdot \vec{dS} = \mu_0 \sum\limits_i I_i$

[C] $\oint\limits_{\Gamma} \vec{B} \wedge \vec{dl} = \mu_0 \sum\limits_i I_i$

[D] $\oiint\limits_{\Gamma} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 \sum\limits_i I_i$

[E] *Aucune des réponses précédentes n'est correcte.*

Question 17 (0.5 point)
En étudiant les plans de *symétrie pour une distribution de courant*, on trouve que la direction du champ magnétique $\vec{B}$ en M est :

[A] inclus dans tout plan Π de symétrie, passant par M.

■ celle de la droite orthogonale à un plan Π de symétrie, passant par M.

[C] celle de la droite intersection d'au moins deux plans de symétrie, passant par M.

[D] *Aucune des réponses précédentes n'est correcte.*

Question 18 (0.5 point)
En étudiant les plans d'*anti-symétrie pour une distribution de courant*, on trouve que le vecteur champ magnétique $\vec{B}$ en M

[A] a pour direction celle de la droite orthogonale à un plan Π' d'anti-symétrie, passant par M.

[B] a pour direction celle de la droite intersection d'un plan de symétrie et d'un plan d'anti-symétrie, passant par M.

■ est inclus dans tout plan Π' d'anti-symétrie, passant par M.

[D] *Aucune des réponses précédentes n'est correcte.*

Maintenant, on considère un *fil de longueur infinie*, confondu avec l'axe (Oz). Il est parcouru par un courant I constant orienté vers les z croissants.

On repère un point M de l'espace dans la base de coordonnées cylindriques : $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

On cherche l'expression du champ magnétique $\vec{B}(M)$ généré par ce fil au point M.

Question 19 (1 point)
Du fait des symétries et des invariances, le vecteur champ magnétique $\vec{B}(M)$ s'écrit :

- ■ $\vec{B}(M) = B(r)\vec{u}_\theta$
- B $\vec{B}(M) = B(z)\vec{u}_z$
- C $\vec{B}(M) = B(z)\vec{u}_r$
- D $\vec{B}(M) = B(\theta)\vec{u}_\theta$
- E *Aucune des réponses précédentes n'est correcte.*

Question 20 (1 point)
En utilisant le *théorème d'Ampère*, on peut écrire le vecteur champ magnétique $\vec{B}(M)$:

- A $\vec{B}(M) = \dfrac{\mu_0 I}{\pi z}\vec{u}_\theta$
- B $\vec{B}(M) = \dfrac{\mu_0 I}{\pi z}\vec{u}_r$
- C $\vec{B}(M) = \dfrac{2\mu_0 I}{\pi r}\vec{u}_z$
- ■ $\vec{B}(M) = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u}_\theta$
- E *Aucune des réponses précédentes n'est correcte.*

Question 21 (2 points)
Donner l'expression du champ magnétique $\vec{B}(M)$ en utilisant le *théorème d'Ampère* et en détaillant les calculs (symétries, invariances ...).
Répondez sur la feuille correspondante, à la fin du sujet.

Correction

Les réponses au QCM ne doivent être apportées que sur cette feuille.
La copie ne sera corrigée que si :

- **elle comporte vos nom, prénom et groupe ;**
- **les cases sont complètement coloriées avec un stylo noir ;**
- **la feuille-réponse ne comporte pas de ratures.**

Question 1 : A B ■ D E

Question 2 : A B C ■ E

Question 3 : A B C ■ E F

Question 5 : A B ■ D

Question 6 : A ■ C D

Question 7 : ■ B C D

Question 8 : A ■ C D

Question 9 : A B ■ D

Question 11 : A B ■ D

Question 12 : ■ B C D

Question 14 : A B ■ D

Question 15 : ■ B C D

Question 16 : ■ B C D E

Question 17 : A ■ C D

Question 18 : A B ■ D

Question 19 : ■ B C D E

Question 20 : A B C ■ E

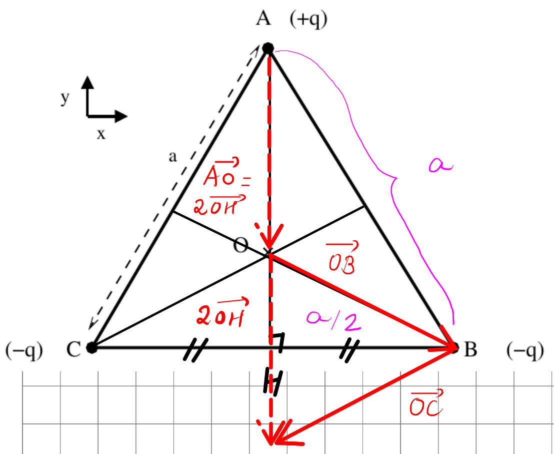
1.5 points

Question 4 : **Trois charges ponctuelles** *Réservé à l'enseignant(e)*

0,5 point

$$\vec{E}(O) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\vec{AO}}{\|\vec{AO}\|^3} - \frac{\vec{BO}}{\|\vec{BO}\|^3} - \frac{\vec{CO}}{\|\vec{CO}\|^3}\right] = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \|AO\|^3}\left[\vec{AO} + \overbrace{\vec{OB} + \vec{OC}}^{2\,\vec{OH}}\right]$$

car le triangle ABC est équilatéral donc : $\|\vec{AO}\| = \|\vec{BO}\| = \|\vec{CO}\|$



et $AO = \frac{2}{3} AH$ avec

$$(AH)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow (AH)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$\Rightarrow AO = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

0,5 point

$\vec{OB} + \vec{OC} = 2\vec{OH} = \vec{AO}$ car cf schéma

donc

$$\vec{E}(O) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{a}\right)^3 \left[\underbrace{\vec{AO} + \vec{AO}}_{2\vec{OA} = -2\frac{a}{\sqrt{3}}\vec{u}_y}\right]$$

$$\Rightarrow \vec{E}(O) = \frac{q}{\cancel{4}\,2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3\cancel{\sqrt{3}}}{a^{\cancel{3}\,2}}\right)\left(-\cancel{2}\frac{\cancel{a}}{\cancel{\sqrt{3}}}\right)\vec{u}_y = \boxed{\frac{-3q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\vec{u}_y}$$

0,5 point

3 points

Question 10 : **Champ électrique pour $r > R$** *Réservé à l'enseignant(e)*

⓪ Définition et continuité : distribution surfacique $\Rightarrow \vec{E}$ défini et continu sur tout l'espace sauf à la traversée de la surface.

① coord. sphériques : $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$

② $\vec{E}(r, \theta, \varphi)$ mais invariance par rotation selon θ et φ

0,5 point

③ Symétrie : tout plan P passant par M et centre O $\left[(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta) \text{ et } (M, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)\right]$ = plan de symétrie

0,5 point

$$\underline{\vec{E} = E(r)\, \vec{e}_r} \quad \text{radial}$$

④ Théorème de Gauss :

$$\boxed{\Phi(\vec{E}) = \oint_{S_G} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}}$$

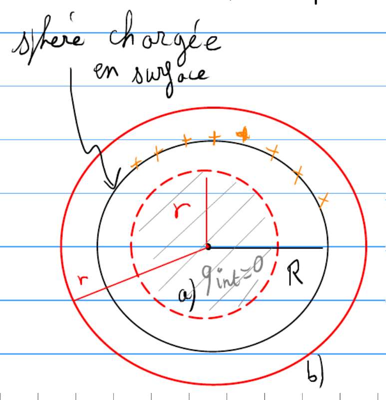
S_G : sphère de centre O et de rayon r

$$a) \Rightarrow \Phi(\vec{E}) = \oint_{S_G} E(r)\, dS_r = \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \underbrace{E(r)\, r^2}_{\text{à } r \text{ fixé}} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = r^2 E(r) \underbrace{\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta}_{2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi}$$

$$d\vec{OM} = \begin{vmatrix} dr = dl_r \\ r\,d\theta = dl_\theta \\ r\sin\theta\, d\varphi = dl_\varphi \end{vmatrix}$$

$$\underline{\Phi(\vec{E}) = 4\pi r^2 E(r)}$$

0,5 point



S_G : sphère de rayon r en rouge

$\cdot\, \underline{q_{int}}$: $\cdot\, r > R$: $q_{int} = Q = 4\pi R^2 \sigma$ donc

0,5 point

$$\cdot\; 4\pi r^2 E(r) = \frac{4\pi R^2 \sigma}{\varepsilon_0}$$

pour $r > R$:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{4\pi R^2 \sigma}{4\pi r^2 \varepsilon_0}\, \vec{e}_r = \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right) \frac{R^2}{r^2}\, \vec{e}_r}$$

1 point

2 points

Question 13 : Deux cylindres coaxiaux [redacted] *Réservé à l'enseignant(e)*

- $\vec{E}(M) = E(r)\,\vec{u}_r = \dfrac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 h r}\,\vec{u}_r$ pour $R_1 < r < R_2$

0,5 point

- $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}\,V(M) \iff dV = -\vec{E}(M)\cdot\vec{dr} = -E(r)\,dr$

pour $R_1 < r < R_2$: $dV = -\dfrac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 h}\dfrac{dr}{r}$

0,5 point

$$\Rightarrow \int_2^1 dV = V_1 - V_2 = -\frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 h}\left[\ln r\right]_{R_2}^{R_1} = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 h}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

0,5 point

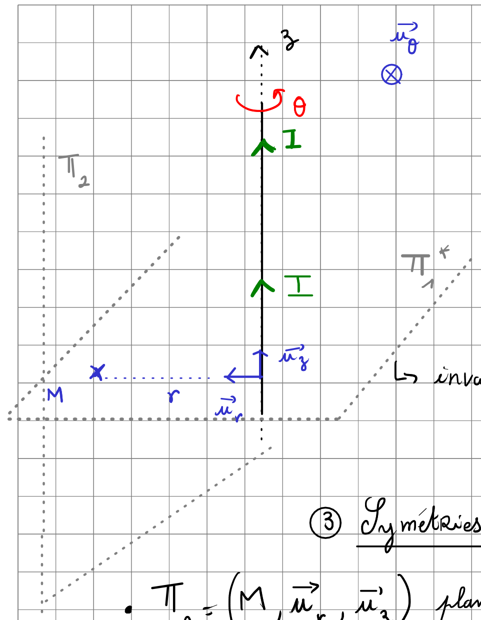
donc $Q_1 = \dfrac{2\pi\varepsilon_0 h}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}(V_1 - V_2)$

$$\boxed{C = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}}$$

0,5 point

2 points

Question 21 : **Fil infini parcouru par un courant** *Réservé à l'enseignant(e)*



① $\{O, (\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)\}$ ↳ $\vec{d\ell} = \begin{vmatrix} dr \\ r\,d\theta \\ dz \end{vmatrix}$

$\vec{B} = B(r, \cancel{\theta}, \cancel{z})\ \vec{u}$

② Invariances :

↳ fil ∞ : invariance par translation selon $\vec{u}_z$

$\rightarrow B(r,\theta,z)$ indépendant de z 0,5 point

↳ invariance par rotation autour de l'axe Oz

$\rightarrow B(r,\theta,z)$ indépendant de θ

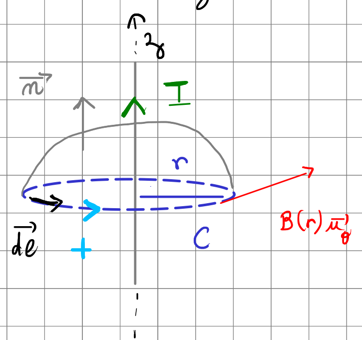
③ Symétries : par rapport à la distribution de courant

• $\Pi_2 = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ plan de symétrie ↳ $\vec{B} \perp \Pi_2 \Rightarrow \vec{B}$ selon $\vec{u}_\theta$ 0,5 point

donc $\boxed{\vec{B} = B(r)\ \vec{u}_\theta}$

④ Théorème d'Ampère : contour C = cercle de rayon r

$$\boxed{\oint_C \vec{B} \cdot \vec{d\ell} = \mu_0\, I_{\text{enlacé}}}$$



• $I_{\text{enlacé}} = +I$

• $\oint_C \vec{B} \cdot \vec{d\ell} = \int_{\text{cercle}} B(r)\, \vec{u}_\theta \cdot (dr\, \vec{u}_r + r\, d\theta\, \vec{u}_\theta + \dots) = \int_{\text{cercle}} B(r)\ r\, d\theta = B(r)\, r \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta$

constant sur le cercle

$= 2\pi r\, B(r)$ 0,5 point

• donc $2\pi r\, B(r) = \mu_0 I \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \left(\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\right) \vec{u}_\theta}$ 0,5 point