CY TECH	**Préing 1** **Devoir Surveillé 1** **Algèbre I**	
	L'usage de tout appareil électronique est interdit	*Date :* **Lundi 21 Octobre 2024** *Durée :* **1h00** *Nombre de pages :* **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte 4 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

◇◇◇

Exercice 1. [4 points]

1. Soit P et Q deux propositions. Montrer, en utilisant les tables de vérité, que les propositions :

$$\text{non}(P \implies Q) \quad \text{et} \quad (P \text{ et } \text{non}(Q))$$

sont équivalentes.

2. En utilisant les tables de vérité, vérifier si la proposition

$$P \text{ et } Q \quad \Longrightarrow \quad \text{non}(P) \text{ ou } Q$$

est vraie.

3. Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Donner la négation de :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \big(|x-a| \leq \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon\big).$$

Exercice 2. [4 points]

Soit $x > -1$. On souhaite démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

1. La récurrence porte-t-elle sur n ? Sur x ? Sur les deux ? Justifier votre réponse.
2. Énoncer l'hypothèse de récurrence.
3. Vérifier que $(1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2$.
4. Rédiger la démonstration.

Exercice 3. [6 points]

1. Soient P et Q deux propositions. Écrire la contraposée de l'implication « $P \Longrightarrow Q$ ».
2. Que peut-on dire sur l'implication « $P \Longrightarrow Q$ » et sa contraposée ?
3. Montrer que, pour tous réels a et b, si $(a \neq -1$ et $b \neq -1)$ alors $a + b + ab \neq -1$.
4. Soit $n > 0$ qui est le carré d'un entier. Démontrer par l'absurde que $2n$ n'est alors pas le carré d'un entier.

Exercice 4. [6 points]

Soit E un ensemble, soit A, B et C trois parties de E.

1. Supposons que $A \subset B$. Montrer que $B^c \subset A^c$.
2. Montrer que $P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$.
   Qu'est ce qu'on peut dire de l'inclusion réciproque ? Justifier votre réponse.
3. Démontrer que
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$
4. Supposons que $A \cup B = B \cap C$. Montrer que $A \subset B \subset C$.