Séries

Devoir Surveillé 1

< Consignes >

Durée : 60 mn

- Les documents et les supports électroniques sont interdits.
- L'épreuve est composée d'exercices indépendants.
- Le barème est à titre indicatif.
- Le barème est sur 18 points et sera complété par 2 points de QCM en cours magistral.
- La qualité de la rédaction et la rigueur des justifications seront prises en compte dans la notation.

< Sujet de l'épreuve >

Exercice 1 (3 pts)

1. Énoncer la définition d'une série numérique semi-convergente.
2. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques à termes positifs telles que $u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n)$. On suppose que la série $\sum v_n$ est convergente. Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente.

Exercice 2 (6 pts)

Déterminer la nature des séries suivantes:

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \ln\left(1 + \frac{2}{n^2+1}\right)$
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n^{\ln(n)}}{n!}$
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

Exercice 3 (4 pts)

On considère la série de terme général

$$u_n = \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$$

1. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$
2. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$

Exercice 4 (5 pts)

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la série numérique de terme général:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^a}$$

1. Donner un développement asymptotique de la suite $\ln(u_n)$ sous la forme :

$$\ln(u_n) = \lambda n^{a-2} + +o\left(n^{a-2}\right),$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ à déterminer.

2. Déterminer la nature la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ dans le cas où $a < 2$
3. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge dans le cas où $a > 2$.