



Préing 1
Devoir Surveillé 1
Analyse I

L'usage de tout appareil électronique est interdit

Date : 12/11/2024

Durée : 1h00

Nombre de pages : 2

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte 4 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

◇◇◇

Exercice 1 (4 points) : Choisir deux des trois questions suivants. Résoudre, dans \mathbb{R} , les équations suivantes :

1. $\sin(x) = \tan(x)$.
2. $6\cos^2(x) - 4\sin^2(x) = 1$.
3. $|x + 1| \leq \sqrt{2x - 5}$

Exercice 2 (5 points) :

1. Trouver sous la forme $\frac{p}{q}$, le rationnel x dont le développement décimal périodique est donné par : $105,124\overline{31}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on note $E(x)$ sa partie entière.
 - (a) Montrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, E(x) + E(y) \leq E(x + y)$.
 - (b) Montrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, E(x) + E(y) + E(x + y) \leq E(2x) + E(2y)$.

Exercice 3 (4 points) : Choisir deux des trois questions suivants. Calculer les sommes et les produits suivants :

1. $\sum_{k=0}^n 5^{2k+1}$.

2. $\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{2}{k}\right)$.

Indication : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}_{>0}^2, \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.

3. $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

Indication : Faire apparaître un produit télescopique.

Exercice 4 (7 points) : On considère les ensembles A et B suivants

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\} : \frac{2x - 10}{-x^2 + x + 2} > 1 \right\} \quad ; \quad B = \left\{ \frac{2n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

1. Les ensembles A et B sont-ils majorés, minorés? Justifier votre réponse.
2. Pour chaque ensemble A et B déterminer, s'il existe, les bornes supérieure et inférieure ainsi que le plus grand et le plus petit élément. Justifier votre réponse.