2024/2025
Semestre 1 – PréIng 2
Mercredi 13 Novembre 2024

ANALYSE DANS $\mathbb{R}^n$

CC1

◁ Consignes ▷

Durée : 60 mn

- Les documents et les supports électroniques sont interdits.
- L'épreuve est composée d'exercices indépendants.
- Le barème est à titre indicatif.
- La qualité de la rédaction et la rigueur des justifications seront prises en compte dans la notation.

◁ Sujet de l'épreuve ▷

Exercice 1 Trois normes pour le prix d'une

Soit N_1 et N_2 deux normes sur un espace vectoriel E. On pose, pour tout $x \in E$:

$$N_0(x) := \max(N_1(x), N_2(x)).$$

Montrer que N_0 définit une norme sur E.

Exercice 2 Intérieur et adhérence d'une partie de $\mathbb{R}^n$

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$.

1. Donner la définition de l'intérieur de A noté $\mathring{A}$, ainsi que de l'adhérence de A notée $\overline{A}$.
2. Montrer que $\mathring{A} \subset A$ et que $A = \mathring{A}$ si et seulement si A est ouvert dans $\mathbb{R}^n$.
3. Montrer que $A \subset \overline{A}$ et que $A = \overline{A}$ si et seulement si A est fermé dans $\mathbb{R}^n$.
4. Soient les ensembles suivants dans $\mathbb{R}$:
   - $A_1 = [0,1[$,
   - $A_2 = [0,1]\cup]2,3] \cup \{4\}$.

   Déterminer l'adhérence et l'intérieur de chacun des ensembles A_1 et A_2, en justifiant soigneusement vos réponses.

Exercice 3 Somme de deux fermés

Soit:

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | xy = 1\}, \text{ et } B := \{0\} \times \mathbb{R},$$

, deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que A et B sont fermés.
2. On rappelle la définition de l'ensemble $A + B$:

   $$A + B := \{x = a + b \in \mathbb{R}^2 | a \in A, b \in B\} \subset \mathbb{R}^2,$$

   il s'agit de l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}^2$ qui sont la somme d'un élément de A et d'un élément de B.

a. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de $\mathbb{R}^2$ définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n := \left(\frac{1}{n}, 0\right).$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = v_n + w_n,$$

avec $v_n \in A$, $w_n \in B$ (à définir explicitement).

b. Montrer que $(0, 0)$ n'appartient pas à $A + B$.

c. En déduire que $A + B$ n'est pas fermé.