CY TECH

Préing 1
Devoir Surveillé 1
Algèbre I

L'usage de tout appareil électronique est interdit

Date : **mardi 22 octobre 2024**
Durée : **1h00**
Nombre de pages : **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte 5 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

⋄⋄⋄

Exercice [3 points]
Soient P, Q et R des propositions. Montrer l'équivalence suivante :

$$(P \text{ ou } Q) \implies R \quad ; \quad (P \Longrightarrow R) \text{ et } (Q \Longrightarrow R)$$

Exercice [4 points]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.

1. Donner la négation de : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0 \Longrightarrow 3 < x < 7$.
2. On considère la proposition $(\mathscr{P})$: "f est périodique"
   (a) Traduire mathématiquement $(\mathscr{P})$.
   (b) Donner la négation de $(\mathscr{P})$.

Exercice [3 points] Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Exprimer à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes :

1. f est une fonction constante.
2. La fonction f s'annule sur $\mathbb{R}$.

Exercice [6 points]

1. On note $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = a_1 = 1$ et pour tout $n \in N$:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{n+1}.$$

   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 \leq a_n \leq n^2.$$

2. Soit $(u_n)_n \in \mathbb{N}$ la suite définie par : $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+2} - u_{n+1} - 6u_n = 0$$

Montrer par récurrence que, pour tout

$$n \in \mathbb{N}, u_n = (-2)^n + 3^n.$$

Exercice [4 points]

Soit E un ensemble, soit A, B et C trois parties de E.

1. Montrer que $A \subset B \Longrightarrow A \cup C \subset B \cup C$
2. En déduire que $A \subset B \Longrightarrow A \cup B = B$
3. Conclure en démontrant que $A \subset B \Longleftrightarrow A \cup B = B$