Séries

Devoir Surveillé 1

◁ Consignes ▷

Durée : 60 mn

- ▶ Les documents et les supports électroniques sont interdits.
- ▶ L'épreuve est composée d'exercices indépendants.
- ▶ Le barème est à titre indicatif.
- ▶ La qualité de la rédaction et la rigueur des justifications seront prises en compte dans la notation.

◁ Sujet de l'épreuve ▷

Exercice 1 (2pts)

Énoncer les théorèmes de convergence des Séries de Riemann et des Séries de Riemann Alternées.

Exercice 2 (8pts)

Déterminer la nature des séries suivantes

1. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{3n^3-4n+1}{n^4+2}$ 2. $\sum_{n\geq 2} \ln\left(1-\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ 3. $\sum_{n\geq 1} \frac{b^n}{n^a},\ a,b\in\mathbb{R}$ 4. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sin(n)}{1+n^2}$

Exercice 3 (6pts)

On considère la série de terme général $u_n = \sqrt{n}$ et on note (S_n) sa suite de sommes partielles : $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\int_0^n \sqrt{x}\,\mathrm{d}x \leq S_n \leq \int_1^{n+1} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.
2. En déduire que S_n est équivalent à $\frac{2}{3}n^{3/2}$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 4 (6pts)

Pour $a \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$ on considère la série de terme général $u_n = (-1)^n\left(\cos\left(\frac{1}{n^a}\right)-1\right)$.

1. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ quand $a \leq 0$.
2. Pour $a > 0$, donner un équivalent de u_n quand n tend vers l'infini.
3. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ quand $a > \frac{1}{2}$.
4. Justifier que pour tout $a \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ il existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $v_n = o\left(\frac{1}{n^{2k_0 a}}\right)$ alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge.
5. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ quand $a \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$