SÉRIES

DEVOIR SURVEILLÉ 1

◁ Consignes ▷

Durée : 60 mn

- ▶ Les documents et les supports électroniques sont interdits.
- ▶ L'épreuve est composée d'exercices indépendants.
- ▶ Le barème est à titre indicatif.
- ▶ La qualité de la rédaction et la rigueur des justifications seront prises en compte dans la notation.

◁ Sujet de l'épreuve ▷

Exercice 1 (2pts)

Énoncer les théorèmes de convergence des Séries de Riemann et des Séries de Riemann Alternées.

Exercice 2 (8pts)

Déterminer la nature des séries suivantes

1. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{3n^3-4n+1}{n^4+2}$ 2. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \ln\left(1-\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ 3. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{b^n}{n^a},\ a,b\in\mathbb{R}$ 4. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sin(n)}{1+n^2}$

Réponse. On notera u_n le terme général des séries.

1. On reconnait une fraction rationnelle. On en déduit que $u_n \sim \frac{3n^3}{n^4} = \frac{3}{n}$ qui est de signe constant et qui n'est pas sommable car la série harmonique diverge. On peut donc utiliser le théorème d'équivalence pour conclure que la série diverge.
2. Pour tout $n \geq 1$, $1-\frac{1}{n\sqrt{n}} < 1$ donc u_n est de signe constant (négatif). En utilisant le développement limité de $\ln(1-x)$ quand x tend vers 0 on déduit que quand $n \to +\infty$, $u_n \sim \frac{-1}{n\sqrt{n}}$ qui est sommable car c'est une série de Riemann avec $\alpha = \frac{3}{2} > 1$. On peut donc utiliser le théorème d'équivalence et conclure que la série converge.
3. Si $b = 0$ on reconnait la série nulle qui est convergente. Si $b \neq 0$ alors pour tout $n \geq 1$, $u_n \neq 0$ donc on peut utiliser la règle de d'Alembert : $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = |b|\left(\frac{n}{n+1}\right)^a \to |b|$ quand $n \to +\infty$. On distingue alors 4 cas :
   - Si $|b| < 1$ alors la série converge (absolument) quelque soit $a \in \mathbb{R}$.
   - Si $|b| > 1$ alors la série diverge grossièrement quelque soit $a \in \mathbb{R}$.
   - Si $b = 1$ alors on la règle de d'Alembert ne permet pas de conclure. Néanmoins on reconnait les séries de Riemann donc on peut conclure que la série converge si $a > 1$ et diverge si $a \leq 1$.
   - Si $b = -1$ on reconnait une série de Riemann alternée donc la série converge si $\alpha > 0$ et diverge si $\alpha \leq 0$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on peut majorer : $|u_n| = \frac{|\sin(n)|}{1+n^2} \leq \frac{1}{1+n^2}$. Or $\frac{1}{1+n^2} \sim \frac{1}{n^2}$ qui converge car c'est une série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$. On en déduit que la série de termes positifs $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ converge par le théorème de majoration, et donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge absolument.

Exercice 3 (6pts)

On considère la série de terme général $u_n = \sqrt{n}$ et on note (S_n) sa suite de sommes partielles : $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\int_0^n \sqrt{x}\,\mathrm{d}x \leq S_n \leq \int_1^{n+1} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.
2. En déduire que S_n est équivalent à $\frac{2}{3}n^{3/2}$ lorsque $n \to +\infty$.

Réponse. 1. La fonction $x \to \sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que pour tout $k \geq 1$:

$$\int_{k-1}^{k} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x \leq u_k \leq \int_{k}^{k+1} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$$

On encourage à faire un dessin rapide sur votre copie pour illustrer cet encadrement.
On peut alors sommer pour k allant de 1 à n et obtenir avec la relation de Chasles :

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^n \sqrt{x}\,\mathrm{d}x \leq S_n \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^{n+1} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x.$$

2. On calcule les intégrales :

$$\int_0^n \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^n = \frac{2}{3}n^{3/2}, \quad \text{et} \quad \int_1^{n+1} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_1^{n+1} = \frac{2}{3}\big((n+1)^{3/2} - 1\big).$$

De plus, quand $n \to +\infty$ on a $\frac{3}{2}\big((n+1)^{3/2}-1\big) \sim \frac{3}{2}n^{3/2}$. On en déduit par encadrement que $S_n \sim \frac{3}{2}n^{3/2}$.

Exercice 4 (6pts)

Pour $a \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$ on considère la série de terme général $u_n = (-1)^n \left(\cos\left(\frac{1}{n^a}\right) - 1\right)$.

1. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ quand $a \leq 0$.
2. Pour $a > 0$, donner un équivalent de u_n quand n tend vers l'infini.
3. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ quand $a > \frac{1}{2}$.
4. Justifier que pour tout $a \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ il existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $v_n = o\left(\frac{1}{n^{2k_0 a}}\right)$ alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge.
5. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ quand $a \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$

Réponse. 1. Si $a < 0$ alors $\cos\left(\frac{1}{n^a}\right)$ n'a pas de limite quand $n \to +\infty$ donc la série diverge grossièrement.

Pour $a = 0$, la suite $u_n = (-1)^n(\cos(1) - 1)$ n'a pas de limite quand $n \to +\infty$ donc la suite diverge grossièrement aussi.

2. Pour $a > 0$, par développement limité du cosinus en 0 on a

$$u_n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{2n^{2a}} + o\left(\frac{1}{n^{2a}}\right) - 1\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{2n^{2a}} + o\left(\frac{1}{n^{2a}}\right)$$

donc $u_n \sim \frac{(-1)^{n+1}}{2n^{2a}}$ quand n tend vers l'infini.

3. Si $a > \frac{1}{2}$ alors $|u_n| \sim \frac{1}{2n^{2a}}$ qui converge car c'est une série de Riemann avec $\alpha = 2a > 1$ donc la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge absolument.

4. On sait que les séries de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. Pour tout $a \in]0, \frac{1}{2}[$ on peut donc choisir un entier $k_0 > \frac{1}{2a}$ avec lequel $2k_0 a > 1$ donc toute série dominée par $\frac{1}{n^{2k_0 a}}$ sera convergente.

5. Le développement limité de cosinus en 0 à l'ordre $2k_0$ s'écrit

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{k_0} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o\left(x^{2k_0}\right)$$

On en déduit le développement limité de u_n

$$\begin{aligned} u_n &= (-1)^n \sum_{k=1}^{k_0} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left(\frac{1}{n^a}\right)^{2k} + o\left(\frac{1}{n^{2k_0 a}}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{k_0} \frac{(-1)^{n+k}}{(2k)!} \frac{1}{n^{2ka}} + o\left(\frac{1}{n^{2k_0 a}}\right). \end{aligned}$$

Pour tout $k \in [\![1, k_0]\!]$, les séries de terme général $w_n = \frac{(-1)^{n+k}}{(2k)!} \frac{1}{n^{2ka}}$ convergent car ce sont des multiples de séries de Riemann alternées avec $\alpha = 2ka > 0$. De plus, par la question précédente on a choisit k_0 tel que la série de terme général $\frac{1}{n^{2k_0 a}}$ converge absolument.
On en déduit que pour tout $a \in]0, 1/2[$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ peut s'écrire comme une somme (finie) de séries convergentes, donc elle converge.