2023/2024
Semestre 1 – PréIng 2
Mercredi 25 Octobre

SÉRIES

DEVOIR SURVEILLÉ 1

◁ Consignes ▷

Durée : 60 mn

- Les documents et les supports électroniques sont interdits.
- L'épreuve est composée d'exercices indépendants.
- Le barème est à titre indicatif.
- La qualité de la rédaction et la rigueur des justifications seront prises en compte dans la notation.

◁ Sujet de l'épreuve ▷

Exercice 1 (2pts)

Énoncer la définition d'une série alternée et le Théorème Spécial des Séries Alternées.

Exercice 2 (6pts)

Pour $n \geq 2$ on considère la série de terme général $u_n = \dfrac{2n+3}{n(n^2-1)}$.

1. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} u_n$.
2. Pour $n \geq 2$ donner la décomposition de u_n en éléments simples.
3. Calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} u_n$.

Exercice 3 (9pts)

Déterminer la nature des séries suivantes

1. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n^2+1}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{a^{n+1}}{n}$, $a \in \mathbb{R}$
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} (-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$

Exercice 4 (4pts)

On considère la série de terme général $u_n = n^2$ et on note (S_n) sa suite de sommes partielles : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\displaystyle\int_0^n t^2 \,\mathrm{d}t \leq S_n \leq \int_1^{n+1} t^2 \,\mathrm{d}t$.
2. En déduire que S_n est équivalent à $\dfrac{1}{3}n^3$ lorsque $n \to +\infty$.