2023/2024
Semestre 1 – PréIng 2
Mercredi 25 Octobre

Séries

Devoir Surveillé 1

◁ Consignes ▷

Durée : 60 mn

- ▶ Les documents et les supports électroniques sont interdits.
- ▶ L'épreuve est composée d'exercices indépendants.
- ▶ Le barème est à titre indicatif.
- ▶ La qualité de la rédaction et la rigueur des justifications seront prises en compte dans la notation.

◁ Sujet de l'épreuve ▷

Exercice 1 (2pts)

Énoncer la définition d'une série alternée et le Théorème Spécial des Séries Alternées.

Exercice 2 (6pts)

Pour $n \geq 2$ on considère la série de terme général $u_n = \dfrac{2n+3}{n(n^2-1)}$.

1. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 2} u_n$.
2. Pour $n \geq 2$ donner la décomposition de u_n en éléments simples.
3. Calculer la somme de la série $\sum_{n\geq 2} u_n$.

Réponse.

1. On reconnait une fraction rationnelle. On en déduit que $u_n \sim \frac{2n}{n^3} = \frac{2}{n^2}$ qui est de signe constant et sommable car série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$. On conclut donc avec le théorème d'équivalence que la série u_n converge.
2. Le dénominateur se factorise : $n(n^2-1) = (n+1)n(n-1)$, d'où la décomposition en éléments simples
$$u_n = \frac{\frac{1}{2}}{n+1} + \frac{-3}{n} + \frac{\frac{5}{2}}{n-1}.$$
3. Pour tout $n \geq 2$, la somme partielle peut s'écrire
$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} u_k &= \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k+1} - 3\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} + \frac{5}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k+1}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+1}\frac{1}{k} - 3\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} + \frac{5}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) - 3\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) + \frac{5}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{9}{4} + O\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$
En passant à la limite $n \to +\infty$ on en déduit que
$$\sum_{n=2}^{+\infty} u_n = \frac{9}{4}.$$

Exercice 3 (9pts)

Déterminer la nature des séries suivantes

1. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n^2+1}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{a^{n+1}}{n}$, $a\in\mathbb{R}$
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} (-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$

Réponse. On notera u_n le terme général des séries.

1. On remarque que $|u_n| = \dfrac{\sqrt{n}}{n^2+1} \sim \dfrac{1}{n^{3/2}}$ qui est sommable car série de Riemann avec $\alpha = \frac{3}{2} > 1$. On en déduit que la série à termes positifs $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ converge par le Théorème d'équivalence. On conclut que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge absolument.
   On aurait aussi pu utiliser le théorème spécial des séries alternées en justifiant rigoureusement que la suite $(|u_n|)$ est monotone décroissante vers 0.
2. Pour $a = 0$ on reconnait la série nulle qui est convergente. Pour tout $a \neq 0$ et $n \geq 1$: $u_n \neq 0$. On peut donc utiliser la règle de d'Alembert : $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = |a|\dfrac{n}{n+1} \to |a|$. On distingue quatre cas :
   - Si $|a| < 1$ alors la série est absolument convergence
   - Si $|a| > 1$ alors la série diverge grossièrement.
   - Si $a = 1$ on reconnait la série harmonique qui est divergente.
   - Si $a = -1$ on reconnait la série harmonique alternée qui est convergente.
3. Pour tout $n \geq 2$ on peut réécrire $u_n = (-1)^n \ln\left(1 + \dfrac{2}{n-1}\right)$ où $1+\dfrac{2}{n-1} > 1$ d'où $\ln\left(1+\dfrac{2}{n-1}\right) > 0$ donc $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ est une série alternée.
   De plus la suite $(v_n)_{n\geq 1} = \left(1+\frac{2}{n-1}\right)_{n\geq 1}$ est monotone décroissante de limite 1 puisque pour tout $n \geq 1$
   $$v_{n+1} - v_n = 1 + \frac{2}{n} - \left(1 + \frac{2}{n-1}\right) = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right) < 0$$
   et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n-1} = 0$. La fonction ln étant monotone sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que la suite $(|u_n|)$ est monotone décroissante de limite 0.
   On peut donc utiliser le théorème spéciale des séries alternées et conclure que la série converge.

Exercice 4 (4pts)

On considère la série de terme général $u_n = n^2$ et on note (S_n) sa suite de sommes partielles : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\displaystyle\int_0^n t^2 \,\mathrm{d}t \leq S_n \leq \int_1^{n+1} t^2 \,\mathrm{d}t$.
2. En déduire que S_n est équivalent à $\dfrac{1}{3}n^3$ lorsque $n \to +\infty$.

Réponse. 1. La fonction $x \to x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que pour tout $k \geq 1$:
$$\int_{k-1}^{k} x^2 \,\mathrm{d}x \leq u_k \leq \int_k^{k+1} x^2 \,\mathrm{d}x$$
On encourage à faire un dessin rapide sur votre copie pour illustrer cet encadrement.
On peut alors sommer pour k allant de 1 à n et obtenir avec la relation de Chasles :
$$\sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} x^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^n x^2 \,\mathrm{d}x \leq S_n \leq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} x^2 \,\mathrm{d}x = \int_1^{n+1} x^2 \,\mathrm{d}x.$$

2. On calcule les intégrales :

$$\int_0^n x^2 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^n = \frac{1}{3}n^3, \quad \text{et} \quad \int_1^{n+1} x^2 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^{n+1} = \frac{1}{3}\big((n+1)^3 - 1\big).$$

De plus, quand $n \to +\infty$ on a $\frac{1}{3}\big((n+1)^3 - 1\big) \sim \frac{1}{3}n^3$. On en déduit par encadrement que $S_n \sim \frac{1}{3}n^3$.