CY TECH

2023/2024
Semestre 1 - PréIng 2
Mardi 24 Octobre

SÉRIES

DEVOIR SURVEILLÉ 1

« Consignes »

Durée : 60 mn

- Les documents et les supports électroniques sont interdits.
- L'épreuve est composée d'exercices indépendants.
- Le barème est à titre indicatif.
- La qualité de la rédaction et la rigueur des justifications seront prises en compte dans la notation.

« Sujet de l'épreuve »

Exercice 1

Déterminer en justifiant si les énoncés suivants sont vrais ou faux:

1. Si la suite (u_n) converge vers 0 alors la série $\sum u_n$ converge.
2. Si $u_n = v_n - v_{n-1}$ alors $\sum u_n$ et $(v_n)_n$ sont de même nature.
3. Si $\sum u_n$ est convergente alors $u_n \leq \frac{1}{2}$.

Exercice 2

Déterminer la nature des séries:

1. $\sum \left(\sin(\frac{1}{n})\right)^n$
2. $\sum \frac{n}{2^n}$
3. $\sum \frac{1}{\ln(n^2+1)}$
4. $\sum \left(\exp(\cos(\frac{1}{n})) - \exp(\cos(\frac{2}{n}))\right)$
5. $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

Exercice 3

Calculer :

1. $\sum_{n\geq 3} \frac{2n-1}{n(n^2-4)}$
2. $\sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{n!}$, sachant que $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} = e$

Exercice 4

Soit a et b deux réels. On considère la série numérique de terme général:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$$

1. Donner un développement asymptotique du terme général de cette série sous la forme :
$$u_n = \alpha \ln(n) + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$
où α, β, γ sont des réels à déterminer en fonction de a et de b.
2. Déterminer les valeurs de a et de b pour que la série converge.
3. Pour ces valeurs de a et de b en cas de convergence, calculer alors $S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n$.
4. En déduire la somme de la série.