SÉRIES

DEVOIR SURVEILLÉ 1

◁ Consignes ▷

Durée : 60 mn

- Les documents et les supports électroniques sont interdits.
- L'épreuve est composée d'exercices indépendants.
- Le barème est à titre indicatif.
- La qualité de la rédaction et la rigueur des justifications seront prises en compte dans la notation.

◁ Sujet de l'épreuve ▷

Exercice 1

Déterminer en justifiant si les énoncés suivants sont vrais ou faux:

1. Si $\sum u_n$ est convergente alors $\sum u_n$ est absolument convergente.
2. Si $u_n = o(\frac{1}{n})$ au voisinage de $+\infty$, alors $\sum u_n$ est divergente.
3. Si $\sum u_n$ est convergente alors $u_n \leq \frac{1}{2}$.

Exercice 2

Déterminer la nature des séries suivantes:

1. $\sum \dfrac{\tan^n(\frac{\pi}{7})}{3^{n+2}}$
2. $\sum \dfrac{2^n}{3^{n-2}}$
3. $\sum \dfrac{\cos(n)}{n^3+n}$
4. $\sum \dfrac{1-\cos(\frac{1}{n})}{\exp(\frac{1}{n})-1}$
5. $\sum (-1)^n \dfrac{n^3}{n!}$

Exercice 3

Calculer :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^2-2}{n!}$, sachant que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} = e$ (Indication: $n^2-2 = n(n-1)+n-2$)

Exercice 4

Soit a et b deux réels. On considère la série numérique de terme général:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$$

1. Donner un développement asymptotique du terme général de cette série sous la forme :

$$u_n = \alpha \ln(n) + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

   où α, β, γ sont des réels à déterminer en fonction de a et de b.

2. Déterminer les valeurs de a et de b pour que la série converge.
3. Pour ces valeurs de a et de b en cas de convergence, calculer alors $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} u_n$.
4. En déduire la somme de la série.